N° d'ordre : 4356 ANNÉE 2011

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1

sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : mathématiques et applications

École doctorale Matisse

présentée par

Mathilde Herblot

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de recherche mathématique de Rennes
UFR de mathématiques

Sur le théorème de Schneider-Lang

Thèse soutenue à Rennes le 1er décembre 2011

devant le jury composé de :

Daniel BERTRAND / professeur
Université de Paris 6 / examinateur

Jean-Benoît BOST / professeur
Université de Paris-Sud / examinateur

Antoine CHAMBERT-LOIR / professeur
Université de Rennes 1 / directeur de thèse

Carlo GASBARRI / professeur
Université de Strasbourg / examinateur

Éric GAUDRON / maître de conférences
Université de Grenoble / rapporteur

Marc HINDRY / professeur
Université de Paris 7 / rapporteur

Laurent MORET-BAILLY / professeur
Université de Rennes 1 / examinateur

REMERCIEMENTS

Pour tout ce qu'il m'a apporté au cours de ces années de thèse, je remercie vivement mon directeur, Antoine Chambert-Loir. Tout d'abord, je le remercie de m'avoir proposé ce passionnant sujet de recherche et de m'avoir fait découvrir la théorie de la transcendance lors de mon mémoire de master. Son enthousiasme communicatif, son infinie patience, son formidable dynamisme et ses encouragements m'ont énormément aidée à accomplir ce travail. Je le remercie également de s'être rendu souvent disponible pour discuter, réfléchir et répondre à mes questions. J'ai eu la chance de pouvoir profiter de son plaisir à partager ses vastes connaissances dans divers domaines des mathématiques et lui en suis reconnaissante. Je le remercie également pour sa contribution, non seulement au fond, mais à la forme de ce mémoire, qui a bien profité de sa maîtrise de LaTeX.

Je remercie chaleureusement les rapporteurs de cette thèse, Éric Gaudron et Marc Hindry, d'avoir accepté de relire mon travail et de l'attention avec laquelle ils l'ont fait. Par leurs remarques tout à fait pertinentes, ils ont contribué à améliorer ce texte et m'ont également suggéré des pistes pour poursuivre ce travail. Éric Gaudron a relevé de nombreuses coquilles et imprécisions lors de sa relecture très minutieuse et je l'en remercie sincèrement. Je le remercie également pour ses explications claires et intéressantes sur la « méthode de la section auxiliaire ».

Je remercie Michel Waldschmidt et Daniel Bertrand de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et de la simplicité et de la gentillesse avec lesquelles ils ont plusieurs fois répondu à mes questions. Je remercie Carlo Gasbarri pour les discussions que nous avons eues à propos du théorème de Schneider-Lang et pour sa manière généreuse de partager ses connaissances et ses idées. Je remercie Jean-Benoît Bost pour ses explications sur la méthode des pentes pour avoir très gentiment pris le temps de réfléchir avec moi à la définition de morphismes d'évaluation en un point fermé.

Je suis heureuse de remercier Daniel Bertrand, Jean-Benoît Bost, Carlo Gasbarri, Éric Gaudron, Marc Hindry et Laurent Moret-Bailly d'avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

L'IRMAR est un laboratoire où il est très agréable de travailler. Les doctorants y sont remarquablement bien accueillis et une place importante leur est accordée. Je remercie tous les collègues avec lesquels j'ai eu des discussions à propos d'enseignement ou de mathématiques.

Je remercie les secrétaires, gestionnaires et le personnel administratif, en particulier Claude Boschet, Pasquale Bréger, Karine Falc'Hon, Chantal Halet, Véronique Le Goff, Morgane Leray, Hélène Rousseaux et Marie-Aude Verger pour leurs disponibilité, amabilité et compétence.

J'ai eu la chance de partager mon bureau avec des collègues agréables. Merci tout d'abord à Noura et Sabine, grâce à qui le bureau 610 fut calme et studieux. Si Sabine m'a montré que l'on pouvait ranger son bureau chaque soir, je n'ai malheureusement pas réussi à apprendre de son exemple. Merci également à Damian, puis Fabien, qui les ont ensuite remplacées. Travailler à leurs côtés fut un réel plaisir ; je n'oublierai pas non plus quelques belles parties de rigolade.

La présence des autres doctorants est précieuse pendant les années de thèse. L'ambiance et la bonne humeur régnant entre les doctorants de Rennes fut particulièrement agréable. Je tiens à remercier les anciens : Gweltaz, Corentin, Fanny, Richard, Viviana, Rodolphe, Nicolas, Anne-Claire, Thomas... les contemporains : Lionel, Marie, Clément, Aurélien, Sébastien, Sten, Nirmal, Jon, Maher, Davide... ainsi que les plus jeunes : Arnaud, Basile, Jean-Louis, Jérémy, Coralie, Pierre, Gaël, Matthieu, Adrien, Anjara, Yoann, Sandrine, Kodjo, Cécile... qui pour les parties de tarot et de Schafkopf, qui pour les pauses thé au bureau 334, qui pour le café rituel du bureau 434, qui pour sa contribution à nos jeux littéraires qui nous changeaient des mathématiques. Et merci à tous pour les grandes tablées conviviales de nos déjeuners.

Merci à Mikaël, Yann, Damian, Clément, Aurélien, Jean-Romain, Viktoria, Mikaël, Marie, Lionel, Sten et Émilie, pour tous ces dîners ensemble, pour leur humour et leur amitié.

Grâce à une bourse de la fondation L'Oréal France, j'ai pu financer un séjour de quatre mois à l'IAS à Princeton. Les conditions de travail y étaient excellentes et j'ai beaucoup apprécié le temps passé là-bas, notamment grâce aux amis que j'y ai rencontrés : Carlo, Laetitia, Giulia, Vitor, Joro, Francesco, Ali, Gabriele, Gabriele, Enrico, Dimitris, merci d'avoir si bien égayé mon séjour.

Merci à Antoine Ducros pour ses conseils de méthodes de travail, ses explications mathématiques toujours limpides et pour avoir régulièrement pris des nouvelles de l'avancée de mes travaux. Merci à Jean-Jacques Horrent, qui fut un professeur passionnant et passionné par les mathématiques. Merci à Éléonore pour ses encouragements à finir ce « petit truc » ainsi que ses conseils pour exposer dans un meilleur anglais américain. Merci à Ines d'avoir veillé à ce que je ne manque pas de chocolat pour finir les dernières corrections de cette thèse. Un grand merci à Sandrine qui a bien voulu s'occuper, en mon absence, de tâches administratives préalables à ma soutenance.

Merci à mes amis, en particulier Pierre, Carlo, Claire, qui a eu l'excellente idée de me convaincre d'aller terminer la rédaction de ce manuscrit à Naples, Gabriele, Émilie et Yaiza.

Je remercie enfin ma famille pour m'avoir encouragée pendant toute la durée de ma thèse et pour me soutenir dans mes choix professionnels. Bravo à Clémence pour m'avoir devancée de quelques mois.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le théorème de Schneider-Lang est un critère classique de transcendance pour les nombres complexes, datant des années 1950. Il affirme que des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, algébriquement indépendantes, ne croissant pas plus vite en l'infini que l'exponentielle d'un polynôme, et vérifiant une équation différentielle polynomiale à coefficients dans un corps de nombres, ne peuvent prendre simultanément des valeurs algébriques qu'en un nombre fini de points. Ce théorème implique directement les théorèmes de Hermite-Lindemann et de Gelfond-Schneider, et donc en particulier la transcendance de e, de π, de e^{π}.

La première version de ce critère a été démontrée par T. Schneider dans son livre [Schneider, 1957], tout d'abord sous la forme d'un énoncé aux hypothèses plus techniques et sans équation différentielle (théorème 12 page 49) puis presque sous la forme maintenant habituelle (théorème 13 page 55). L'énoncé sous ses hypothèses classiques est dû à S. Lang ([Lang, 1962], théorème 3 et [Lang, 1966]). Une démonstration très claire du résultat avec une borne optimale sur le nombre de points et des remarques supplémentaires sont exposées dans [Waldschmidt, 1974] (théorème 3.3.1). Voici l'énoncé précis de ce critère, avec les hypothèse dues à S. Lang et la borne due à M. Waldschmidt.

***Théorème A* (Schneider-Lang).** — *Soit K un corps de nombres, et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ d'ordre fini, inférieur à ρ. Supposons que le degré de transcendance du corps $K(f_1, \ldots, f_n)$ sur K soit supérieur ou égal à 2, et que l'anneau $K[f_1, \ldots, f_n]$ soit stable par la dérivation $\frac{d}{dz}$.*

Soit W l'ensemble des points w de $\mathbf{C}$ qui ne sont pas des pôles des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ et tels que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $f_i(w) \in K$.

Alors W est fini, et plus précisément :

$$\operatorname{Card}(W) \leqslant \frac{r}{r-1}\rho[K : \mathbf{Q}],$$

où $r = \operatorname{degtr}_K K(f_1, \ldots, f_n)$.

Rappelons que l'on dit qu'une fonction f entière sur $\mathbf{C}$ est *d'ordre inférieur à* ρ, pour ρ un nombre réel strictement positif, s'il existe des nombres réels positifs A, B tels que, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$|f(z)| \leqslant Ae^{B|z|^\rho}.$$

Une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ est *d'ordre inférieur à* ρ si elle peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions holomorphes d'ordre inférieur à ρ.

La démonstration de ce critère procède d'un raisonnement désormais classique en théorie des nombres transcendants. Elle consiste à construire une fonction auxiliaire, sous la forme d'un polynôme non nul en les fonctions $f_1, \ldots, f_n$, de degré D donné, qui s'annule à un grand ordre en des points $w_1, \ldots, w_m$ en lesquels les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ prennent toutes des valeurs dans le corps de nombres. Un *lemme de Siegel* permet de construire un tel polynôme dont les coefficients sont entiers et de taille contrôlée. On s'intéresse à la plus petite dérivée de cette fonction auxiliaire qui ne soit pas nulle en tous les points $w_1, \ldots, w_m$, et à sa valeur non nulle γ en l'un de ces points. On majore la valeur absolue de γ grâce au *lemme de Schwarz* en analyse complexe. D'autre part, on la minore en utilisant que la norme d'un entier algébrique est plus grande que 1. Lorsque l'on fait tendre le degré D du polynôme auxiliaire vers l'infini, ces deux inégalités fournissent la majoration souhaitée du nombre m de points.

Voici l'énoncé du *lemme de Schwarz* qui sert dans cette démonstration.

***Théorème* (Lemme de Schwarz).** — *Soit k un nombre entier naturel et soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ s'annulant à l'ordre au moins k en 0. Alors, pour tous nombres réels r et R tels que* $0 < r < R$,

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^k \max_{|z|=R} |f(z)|,$$

et

$$\left|\frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\right| \leqslant R^{-k} \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Il se démontre en appliquant le principe du maximum à la fonction holomorphe $z \mapsto \frac{f(z)}{z^k}$ sur le disque de rayon R.

Voici une reformulation « géométrique » du théorème de Schneider-Lang équivalente à l'énoncé classique. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$, où $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, d'ordre fini. On peut reformuler l'hypothèse de stabilité par dérivation de l'anneau $K[f_1, \ldots, f_n]$, et celle sur le degré de transcendance de $K(f_1, \ldots, f_n)$ en les deux hypothèses suivantes sur l'image de f : l'image de f est une feuille d'un feuilletage sur $\mathbf{C}^n$ algébrique sur K et son adhérence de Zariski est de dimension au moins 2.

Des travaux de C. Gasbarri [Gasbarri, 2010] donnent des généralisations de cet énoncé géométrique du théorème de Schneider-Lang, en utilisant la *méthode des pentes* inventée par J.-B. Bost pour formuler de façon géométrique les méthodes de transcendance (voir [Bost, 1996; Chambert-Loir, 2002; Bost, 2001, 2006]). On peut facilement remplacer l'espace d'arrivée $\mathbf{C}^n$ par une variété algébrique projective quelconque X définie sur le corps de nombres K.

Dans la démonstration, l'hypothèse d'équation différentielle ne sert que pour donner des estimées de nature arithmétique sur les valeurs (algébriques) prises par la fonction auxiliaire en les points étudiés. Cette hypothèse d'équation différentielle globale donne un énoncé simple et élégant, admettant de nombreux corollaires, mais n'est pas une hypothèse nécessaire. D'ailleurs, le premier énoncé de ce type, démontré par Schneider dans [Schneider, 1949], ne contenait pas cette hypothèse, mais des hypothèses plus générales, assez techniques, portant sur les dénominateurs des séries de Taylor des fonctions au voisinage des points étudiés.

Soit maintenant p un nombre premier, notons $\mathbf{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. L'analogue p-adique « naturel » du théorème de Schneider-Lang, c'est-à-dire un énoncé portant sur des fonctions méromorphes non plus sur $\mathbf{C}$, mais sur $\mathbf{C}_p$, et vérifiant les mêmes hypothèses, est également vrai. La démonstration s'adapte sans difficulté au cas p-adique. Néanmoins, un tel énoncé n'a, à notre connaissance, aucune application ; il ne peut notamment pas être appliqué à la fonction exponentielle, puisque son rayon de convergence p-adique est fini. Dans cette thèse, nous généralisons ce théorème dans le but, pas encore atteint, d'obtenir des applications en transcendance p-adique. Nous signalons que, dans le cas p-adique, il existe des énoncés de nature différente des nôtres, ayant des applications à la transcendance p-adique. Ainsi, W. Adams démontre dans [Adams, 1966] un analogue p-adique du théorème de Schneider-Lang sur un disque, qui implique en particulier l'analogue p-adique du théorème de Gelfond-Schneider, établi par K. Mahler [Mahler, 1935]. D. Bertrand redémontre l'analogue p-adique du théorème de Gelfond-Schneider dans [Bertrand, 1974]. Dans [Bertrand, 1977a], il démontre un critère de nature locale dont on peut déduire les analogues p-adiques des résultats de T. Schneider (voir [Schneider, 1957]) sur les fonctions elliptiques de Weierstraß.

Comme ceux de C. Gasbarri dans le cas complexe, les résultats établis dans cette thèse concernent des germes formels de courbes définis au voisinage des points étudiés et supposent une hypothèse de nature « arakelovienne » : on dit qu'un tel sous-schéma formel est α-*arithmétique* si la partie finie de la hauteur d'un *morphisme d'évaluation* aux points considérés qui lui est associé vérifie une certaine majoration (voir le paragraphe 3.2 pour la définition des morphismes d'évaluation, et le paragraphe 3.4 pour la définition de sous-schéma formel α-arithmétique). Le paramètre α est un nombre réel positif ; plus il est petit, plus la condition est forte. Dans le cas d'une équation différentielle polynomiale, c'est-à-dire d'un feuilletage algébrique, un germe de feuille en un point algébrique définit un sous-schéma formel 1-arithmétique (lemmes 3.6 et 3.13). Si de plus presque toutes les $\mathfrak{p}$-courbures de l'équation différentielle sont nulles, le sous-schéma formel est 0-arithmétique. La proposition 3.17 explique que si une certaine « densité » $\alpha \in [0,1]$ de $\mathfrak{p}$-courbures est nulle, alors les sous-schémas formels sont $(1-\alpha)$-arithmétiques. Le théorème 4.6 fait alors le lien entre le critère de Schneider-Lang classique et un critère d'algébricité de feuille d'un feuilletage dont presque toutes les $\mathfrak{p}$-courbures sont nulles, proche du théorème de J.-B. Bost dans [Bost, 2001]. Il généralise aussi un résultat non publié d'A. Thuillier.

Nous imposons aussi une condition d'*uniformisation d'ordre* ρ des sous-schémas formels *en une place* donnée qui généralise l'hypothèse d'une courbe paramétrée par des fonctions méromorphes d'ordre ρ sur la droite affine sur $\mathbf{C}$. Cette condition est introduite au paragraphe 4.1 (définition 4.5) et consiste en l'existence d'une application holomorphe d'une courbe algébrique projective privée d'un nombre fini de points $\tau \in T$ dans X qui paramètre les sous-schémas formels $\widehat{V}_j$. Nous définissons pour une telle application une notion d'*ordre de croissance au voisinage des singularités* $\tau \in T$, généralisant la notion d'ordre de croissance en l'infini d'une application méromorphe sur $\mathbf{C}$ (paragraphe 4.1, définition 4.1).

Le théorème suivant est un analogue p-adique du résultat de C. Gasbarri (dans [Gasbarri, 2010]) en une variable, sur une courbe affine.

Théorème 4.6. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres K. Soient $x_1, \cdots, x_m \in X(K)$ (non nécessairement distincts) et pour $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-schéma formel lisse de dimension 1 du complété formel $\hat{X}_{x_j}$ de X en x_j vérifiant les hypothèses suivantes :*

1. *Il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\widehat{V}_j$ est α-arithmétique.*
2. *La famille de sous-schémas formels $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ admet une uniformisation d'ordre inférieur à $\rho > 0$ en une place v_0.*

Soit r la dimension de l'adhérence de Zariski de $\widehat{V} = \bigcup_{j=1}^{m} \widehat{V}_j$ dans X.

Alors,

– *ou bien $r > 1$ et*

$$m \leqslant \frac{r}{r-1} \alpha [K : \mathbf{Q}] \rho,$$

– *ou bien $r = 1$, c'est-à-dire les $\widehat{V}_j$ sont tous algébriques.*

Dans le cas où la variété X est $\mathbf{C}^n$ et les sous-schémas formels $\widehat{V}_j$ sont paramétrés par des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ d'ordre inférieur à ρ, on retrouve bien le théorème de Schneider-Lang classique (théorème A), les points $x_1, \ldots, x_m$ étant les images de m points de l'ensemble noté W dans le théorème A.

Ce théorème généralise un résultat de D. Bertrand, qui a démontré dans l'article [Bertrand, 1975] un théorème de Schneider-Lang sur l'espace projectif $\mathbf{P}^1$ privé d'un nombre fini de points, dans les cas complexe et p-adique. Il généralise aussi [Wakabayashi, 1987] dans lequel I. Wakabayashi démontre un théorème de Schneider-Lang sur le complémentaire d'un nombre fini de points dans une surface de Riemann compacte, dans les cas complexe.

Dans le cas complexe, c'est-à-dire dans la cas où la place privilégiée v_0 est archimédienne, ce théorème 4.6 redonne un cas particulier d'un énoncé de C. Gasbarri, qui est valable pour une application holomorphe définie sur une *courbe parabolique* au sens de Ahlfors (voir [Ahlfors et Sario, 1960]), toute courbe algébrique étant parabolique. L'ordre de croissance d'une telle fonction est alors défini à l'aide de la théorie de Nevanlinna.

La démonstration utilise la *méthode des pentes* de J.-B. Bost, qui nécessite le langage de la *géométrie d'Arakelov* (des rappels sur cette méthode sont faits au début du chapitre 1). Un fibré ample sur X est fixé, et le morphisme d'évaluation φ_D^k envoie une section de $L^{\otimes D}$ s'annulant à l'ordre k le long des sous-schémas formels $\widehat{V}_j$ sur le $(k+1)$-ième « coefficient de Taylor » de sa restriction à $\widehat{V}$.

La démonstration du théorème 4.6 repose sur l'*inégalité de pentes* et consiste à montrer que les morphismes d'évaluation associés aux sous-schémas formels étudiés et apparaissant dans l'*inégalité de pentes* vérifient une certaine majoration. Plus précisément, la majoration requise est la combinaison de deux majorations d'origines distinctes : l'une provient de la condition que les sous-schémas formels $\widehat{V}_j$ sont α-arithmétiques (3.10) et l'autre utilise l'*uniformisation d'ordre* ρ des sous-schémas formels en une place privilégiée (voir la partie 4.2). C'est à ce point de la démonstration qu'interviennent, comme dans le cas classique, les estimées analytiques issues du principe du maximum. Dans le théorème classique, l'estimation vient du principe du maximum appliqué sur un « grand » disque. On peut également voir ce « grand » disque comme le complémentaire d'un « petit » disque autour de l'infini. C'est l'idée-clé utilisée ici : ôter de petits « disques » bien choisis autour des points $\tau \in T$. Ces considérations permettent de majorer la hauteur des morphismes d'évaluation à la place privilégiée fournie par l'uniformisation, résultat qui joue un rôle analogue aux majorations de dérivées que donne le *lemme de Schwarz* dans le cas classique. Ainsi, nous emploierons encore l'expression *lemme de Schwarz* pour désigner des majorations de la hauteur des morphisme d'évaluation obtenues par ces techniques, bien qu'elles ne fassent pas apparaître explicitement d'énoncé de *lemme de Schwarz* au sens classique.

Dans le chapitre 5, nous donnons une amélioration du théorème 4.6, qui est une généralisation d'un théorème de D. Bertrand [Bertrand, 1977b]. Au lieu de considérer l'ensemble des points dont l'image est dans un corps de nombre donné, on considère l'ensemble de tous les points dont l'image est algébrique. Une conjecture de M. Walsdchmidt (voir [Waldschmidt, 1977]) affirme que cet ensemble est fini. Dans cette direction, D. Bertrand a démontré le théorème suivant qui fournit une majoration où interviennent les degrés de ces points algébriques.

***Théorème B* (Bertrand, 1977)**. — *Soit k un corps de nombres et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ telles que $k[f_1, \ldots, f_n]$ est stable par la dérivation d/dz et f_1, f_2 sont algébriquement indépendantes d'ordres finis ρ_1 et ρ_2. Soit W l'ensemble des nombres complexes w distincts des pôles des fonctions de $f_1, \ldots, f_n$ tels que $k(f_1(w), \ldots, f_n(w))$ soit une extension finie de k. Alors*

$$\sum_{w \in W} \frac{1}{[k(f_1(w), \ldots, f_n(w)) : k]} \leqslant (\rho_1 + \rho_2)[k : \mathbf{Q}].$$

Dans cet esprit, nous démontrons le théorème :

Théorème 5.2. — *Soit X une variété projective sur $\mathbf{Q}$ et soient $x_1, \ldots, x_m$ des points fermés de X. Pour $j \in \{1, \ldots, m\}$, notons $K_j = \mathbf{Q}(x_j)$ le corps résiduel de x_j et d_j son degré sur $\mathbf{Q}$. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-K_j-schéma formel lisse α-arithmétique de dimension 1 du complété $\hat{X}_{x_j}$ de X en x_j. Supposons que le sous-schéma formel $\widehat{V} = \bigcup_{j=1}^m \widehat{V}_j$ admet une uniformisation d'ordre inférieure à $\rho > 0$ en une place p_0 de $\mathbf{Q}$. Soit r la dimension de l'adhérence de Zariski de $\widehat{V}$ dans X.*

Alors,

– ou bien $r > 1$ et

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{d_j} \leqslant \frac{r}{r-1} \alpha \rho,$$

– ou bien $r = 1$, c'est-à-dire les $\widehat{V}_j$ sont tous algébriques.

Le théorème de Schneider-Lang (théorème A) peut se généraliser en plusieurs variables, c'est-à-dire à des fonctions méromorphes non plus sur $\mathbf{C}$, mais sur $\mathbf{C}^d$. La difficulté de telles généralisations réside dans la démonstration d'un *lemme de Schwarz* en plusieurs variables. Dans l'article [Bombieri, 1970], E. Bombieri a ainsi démontré le théorème suivant :

***Théorème C* (Bombieri)**. — *Soit K un corps de nombres. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions méromorphes d'ordre inférieur à ρ sur $\mathbf{C}^d$, et soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Supposons que l'anneau $K[f_1, \ldots, f_n]$ soit stable par les n dérivées partielles*

$\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$, et que le degré de transcendance r de $K(f_1, \ldots, f_n)$ sur K soit supérieur ou égal à $d+1$.

Alors l'ensemble des points $w \in \mathbf{C}^d$ en lesquels f est définie et $f(w) \in K^n$ est inclus dans une hypersurface algébrique, de degré au plus

$$d(d+1)\rho[K : \mathbf{Q}].$$

Cette borne sur le degré de l'hypersurface est un peu meilleure que celle donnée initialement par E. Bombieri. Elle est due à H. Skoda, qui améliore dans [Skoda, 1977] le lemme de Schwarz établi par E. Bombieri (voir également [Waldschmidt, 1979], théorème 5.1.1).

La première généralisation en ce sens avait été faite par Lang dans les années 60 ([Lang, 1965], théorème 1, [Lang, 1966], chap IV th.1) en imposant une hypothèse supplémentaire sur l'ensemble des points en lesquels les fonctions prennent simultanément des valeurs dans le corps de nombres : que cet ensemble soit un produit cartésien. Cette hypothèse, qui ne semble pas très naturelle, permet de ramener la démonstration du *lemme de Schwarz* à celui d'un *lemme de Schwarz* en une seule variable.

***Théorème D* (Lang).** — *Soit K un corps de nombres. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^d$, d'ordre fini, inférieur à ρ. Supposons que l'anneau $K[f_1, \ldots, f_n]$ soit stable par les d dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_d}$, et que le degré de transcendance r de $K(f_1, \ldots, f_n)$ sur K soit supérieur ou égal à $d+1$.*

Soit $W = W_1 \times \cdots \times W_d \subset \mathbf{C}^d$ un produit cartésien de d parties finies $W_1, \ldots, W_d$ de $\mathbf{C}$, chacune de cardinal m, telles que pour tout $w \in W$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, les fonctions f_j sont définies en w et $f_j(w) \in K$.

Alors

$$m \leqslant \frac{r}{r-d}\rho[K : \mathbf{Q}].$$

Le chapitre 6 présente un analogue p-adique de ce théorème de Lang. La démonstration de ce résultat s'appuie sur un *lemme de Schwarz* p-adique en plusieurs variables dans le cas des produits cartésiens. P. Robba a démontré dans [Robba, 1978] un tel *lemme de Schwarz* pour les produits cartésiens de $\mathbf{C}_p^n$. Dans le paragraphe 6.3, nous démontrons un *lemme de Schwarz* pour les produits cartésiens d'un produit d'ouverts de la droite affine sur $\mathbf{C}_p$, dont nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 6.5. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres K. Soient $d, m_1, \ldots, m_d$ des nombres entiers naturels non nuls et soit $m = m_1 \cdots m_d$. Soient $x_1, \ldots, x_m \in X(K)$ (non nécessairement distincts) et pour $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-schéma formel lisse de dimension d du complété formel $\hat{X}_{x_j}$ de X en x_j vérifiant les hypothèses suivantes :*

1. *Il existe* $\alpha > 0$ *tel que, pour tout* $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\widehat{V}_j$ *est* α*-arithmétique.*
2. *Il existe une place finie* $\mathfrak{p}_0$ *de* K*, il existe des nombres réels positifs* $\rho_1, \ldots, \rho_d$ *tels que la famille* $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ *admette une uniformisation cartésienne de type* $(m_1, \ldots, m_d)$ *d'ordre inférieur à* $(\rho_1, \ldots, \rho_d)$ *à la place* $\mathfrak{p}_0$ *par un produit d'ouverts de la droite affine sur* $\mathbf{C}_{\mathfrak{p}_0}$.

Soit r *la dimension de l'adhérence de Zariski de* $\widehat{V} = \cup_{j=1}^m \widehat{V}_j$ *dans* X.
Alors,
– *ou bien* $r > d$ *et*

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\rho_i}{m_i} \right)^{-1} \leqslant \alpha [K : \mathbf{Q}] \frac{dr}{r-d},$$

– *ou bien* $r = d$*, c'est-à-dire les* $\widehat{V}_j$ *sont tous algébriques.*

CHAPITRE 1

MÉTHODE DES PENTES

Ce chapitre présente les définitions et éléments de géométrie d'Arakelov utiles dans la suite, en particulier l'énoncé de *l'inégalité de pentes*. Les résultats sont énoncés sans démonstrations. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [Bost, 1996; Chambert-Loir, 2002; Bost, 2001; Chen, 2006; Bost, 2006; Viada, 2001, 2005].

1.1. Quelques définitions en géométrie d'Arakelov

Soit K un corps de nombres et $\mathfrak{o}_k$ son anneau d'entiers. Soit Σ_K l'ensemble des places de K. Les places de K sont de deux types : les *places finies* correspondent aux idéaux premiers de $\mathfrak{o}_K$, et les *places archimédiennes* sont les $[K:\mathbf{Q}]$ plongements de K dans $\mathbf{C}$. À chaque idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K$ on associe une valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique $|.|_{\mathfrak{p}}$ sur K normalisée de la manière suivante : soit ϖ une uniformisante, alors

$$|\varpi|_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-1},$$

où $N(\mathfrak{p})$ désigne la norme de l'idéal $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire le cardinal de $\mathfrak{o}_k/\mathfrak{p}$. Si $K_{\mathfrak{p}}$ désigne le complété de K pour cette valeur absolue et p le nombre premier tel que $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbf{Z}$, on a

$$|p|_{\mathfrak{p}} = p^{-[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]}. \tag{1.1}$$

Un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ définit une valeur absolue sur K par $|x|_\sigma := |\sigma(x)|$, où $|.|$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{C}$.

Soit $x \in K \setminus \{0\}$. Avec ces normalisations, la *formule du produit* s'énonce :

$$\prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{o}_K} |x|_{\mathfrak{p}} \prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C}} |x|_\sigma = 1. \tag{1.2}$$

Définition 1.1. — *Un* fibré vectoriel hermitien *sur* Spec $\mathfrak{o}_k$ *est un couple* $\overline{E} = (E, (\|.\|_\sigma)_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C}})$*, où* E *est un* $\mathfrak{o}_k$*-module projectif de type fini, et,* *pour chaque plongement* $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$*,* $\|.\|_\sigma$ *est une métrique hermitienne sur* $E_\sigma(\mathbf{C}) = E \otimes_{\mathfrak{o}_K,\sigma} \mathbf{C}$ *et la famille* $(\|.\|_\sigma)_\sigma$ *est invariante par conjugaison complexe. Son rang est, par définition, le rang de* E*.*

Soit $\overline{E}$ un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{o}_K$. L'espace vectoriel $E_{K_\mathfrak{p}} = E \otimes_{\mathfrak{o}_K} K_\mathfrak{p}$ est muni d'une norme $\mathfrak{p}$-adique, définie par

$$\|e\|_\mathfrak{p} = \inf\{|a|_\mathfrak{p},\ a \in K_\mathfrak{p}^* \text{ tq } e \in aE\}, \tag{1.3}$$

pour $e \in E_{K_\mathfrak{p}}$.

On peut effectuer sur ces fibrés vectoriels hermitiens des constructions standard, notamment : sous-fibré (muni de la norme induite), somme directe (munie de la norme somme directe orthogonale), quotient, produit tensoriel, puissance extérieure et puissance symétrique.

Définition 1.2. — *Soit* $\overline{E}$ *un fibré vectoriel hermitien de rang 1 sur* $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$*. Le* degré arithmétique *de* $\overline{E}$ *est*

$$\widehat{\deg}\, \overline{E} = \log |E/\mathfrak{o}_K e| - \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|e\|_\sigma,$$

où e *est un élément non nul de* E*.*

On démontre à l'aide de la formule du produit que cette définition ne dépend pas du choix de $e \in E \setminus \{0\}$.

Définition 1.3. — *Le* degré arithmétique *d'un fibré vectoriel hermitien de rang* $d \in \mathbf{N}^*$ *sur* $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$ *est le degré arithmétique de sa puissance extérieure maximale* $\bigwedge^d E$*. Il est égal à*

$$\widehat{\deg}\, \overline{E} = \log |E/\mathfrak{o}_K e_1 + \cdots + \mathfrak{o}_K e_d| - \frac{1}{2} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \det(\langle e_i, e_j \rangle_\sigma),$$

pour toute base $(e_1, \ldots, e_d) \in E^d$ *de* E_K *sur* K*.*

Définition 1.4. — *La* pente *d'un* $\mathfrak{o}_K$*-fibré vectoriel hermitien* $\overline{E}$ *non nul est le quotient de son degré arithmétique par son rang,*

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) = \frac{\widehat{\deg}\, \overline{E}}{\operatorname{rg}(E)}.$$

Lorsque $\overline{F}$ *décrit l'ensemble des* $\mathfrak{o}_K$*-sous-fibrés non nuls de* $\overline{E}$*, l'ensemble des pentes* $\widehat{\mu}(\overline{F})$ *est majoré. Sa borne supérieure est un maximum, que l'on appelle la* pente maximale *de* $\overline{E}$ *et qui est notée* $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$*.*

Les pentes et pentes maximales que nous venons de définir ne sont pas normalisées. L'usage le plus courant est de définir la pente d'un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ non nul comme $\widehat{\mu}(\overline{E}) = \frac{\widehat{\deg}\, \overline{E}}{[K:\mathbf{Q}] \operatorname{rg}(E)}$ et sa pente maximale (normalisée) comme la plus grande des pentes (normalisées) de ses sous-fibrés.

Le lemme ci-dessous rappelle le comportement de la pente maximale par produit tensoriel et puissance symétrique (voir par exemple [Bost, 2001], lemmes 4.2 et 4.3. pour la démonstration).

Lemme 1.5. — *Pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ et tout fibré en droites hermitien $\overline{L}$ sur* $\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}_K$*,*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}\otimes\overline{L}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \widehat{\deg}(\overline{L}). \tag{1.4}$$

Pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}_K$*, il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que, pour tout nombre entier naturel k,*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\mathrm{Sym}^k\,\overline{E}) \leqslant ck. \tag{1.5}$$

Pour tous fibrés vectoriels hermitiens $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sur $\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}_K$,

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}\oplus\overline{F}) = \max(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}),\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})), \tag{1.6}$$

où la somme directe est munie de la métrique somme directe orthogonale.

1.2. Hauteurs de morphismes

Définition 1.6. — *Soient $\overline{E}$, $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens sur* $\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}_K$ *et soit φ une application K-linéaire non nulle de $E_K = E\otimes_{\mathfrak{o}_K} K$ dans $F_K = F\otimes_{\mathfrak{o}_K} K$. Soit v une place de K. La hauteur de φ à la place v est le logarithme de la norme d'opérateur de φ étendu en une application linéaire de E_v dans F_v, où E_v et F_v sont les complétés de E et F en la place v :*

$$h_v(\varphi) = \log\|\varphi\|_v = \log\left(\sup_{e\in E_v\setminus\{0\}}\frac{\|\varphi(e)\|_v}{\|e\|_v}\right).$$

La hauteur *de φ est la somme des hauteurs de φ en chacune des places de K :*

$$h(\varphi) = \sum_{v\in M_K} h_v(\varphi) = \sum_{\mathfrak{p}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi) + \sum_{\sigma: K\hookrightarrow\mathbf{C}} h_\sigma(\varphi). \tag{1.7}$$

Cette définition de hauteur est celle donnée habituellement en théorie d'Arakelov. Il nous sera utile pour la suite de la récrire un peu différemment, de manière à faire jouer un rôle plus semblable aux places archimédiennes et aux places ultramétriques, comme dans [Chambert-Loir, 2010].

Si p est un nombre premier, notons $\mathbf{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique du corps des nombres p-adiques $\mathbf{Q}_p$, complété de $\mathbf{Q}$ pour la topologie p-adique. Notons encore $|\cdot|_p$ l'unique valeur absolue sur $\mathbf{Q}_p$ qui étend la valeur absolue p-adique sur $\mathbf{Q}$. Alors à tout plongement σ_p de K dans $\mathbf{C}_p$ on peut associer une valeur absolue sur K en posant, pour $x\in K$:

$$|x|_{\sigma_p} = |\sigma_p(x)|_p.$$

Désignons par $\mathbf{C}_\infty$ le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ et $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C}$. Les valeurs absolues archimédiennes sur K prolongeant la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{Q}$ sont alors les $x \mapsto |\sigma(x)|_\infty$.

Proposition 1.7. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens et soit φ une application K-linéaire non nulle de $E_K = E \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$ dans $F_K = F \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$. Alors*

$$h(\varphi) = \sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} h_\sigma(\varphi), \tag{1.8}$$

où dans la première somme l'indice p décrit la réunion de l'ensemble des nombres premiers et du singleton $\{\infty\}$.

Démonstration. — Deux plongements de K dans $\mathbf{C}_p$ peuvent induire la même valeur absolue sur K. Soit v une place de K et soit ε_v le nombre de plongements σ de K dans $\mathbf{C}_p$ induisant la même valeur absolue sur K. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} h_\sigma(\varphi) &= \sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\substack{v \in M_K \text{ tq} \\ (|\cdot|_v)_{|\mathbf{Q}} = |\cdot|_p}} \varepsilon_v h_v(\varphi) \\
&= \sum_{p < \infty} \sum_{\substack{v \in M_K \text{ tq} \\ (|\cdot|_v)_{|\mathbf{Q}} = |\cdot|_p}} \varepsilon_v h_v(\varphi) + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} h_\sigma(\varphi) \\
&= \sum_{p < \infty} \sum_{\substack{v \in M_K \text{ tq} \\ (|\cdot|_v)_{|\mathbf{Q}} = |\cdot|_p}} \log(\|\varphi\|_v^{\varepsilon_v}) + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} h_\sigma(\varphi).
\end{aligned}$$

Soit v une place de K étendant la valeur absolue p-adique sur $\mathbf{Q}$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_K$ correspondant à la place v. Alors d'après la normalisation (1.1) choisie pour la norme $\mathfrak{p}$-adique sur K,

$$|\cdot|_\mathfrak{p} = |\cdot|_v^{[K_v : \mathbf{Q}_p]}.$$

Comme $\varepsilon_v = [K_v : \mathbf{Q}_p]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} h_\sigma(\varphi) &= \sum_{p < \infty} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_K, \\ \mathfrak{p} | p}} h_\mathfrak{p}(\varphi) + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} h_\sigma(\varphi) \\
&= \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_K} \log \|\varphi\|_\mathfrak{p} + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} h_\sigma(\varphi) \\
&= h(\varphi),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition 1.7. □

Lemme 1.8. — *Soient K un corps de nombres, $\overline{E}, \overline{F}$ des $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens et soient $E_K = E \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$ et $F_K = F \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$. Soit $\varphi : E_K \to F_K$ une application K-linéaire non nulle. Soit L une extension finie de K. Alors, pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K$, on a*

$$\frac{1}{[L:\mathbf{Q}]} \sum_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_L, \\ \mathfrak{q} \mid \mathfrak{p}}} h_{\mathfrak{q}}(\varphi \otimes_K L) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} h_{\mathfrak{p}}(\varphi).$$

Démonstration. — Soit $K_{\mathfrak{p}}$ le complété de K pour la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique. L'application φ s'étend en une application $K_{\mathfrak{p}}$-linéaire que l'on note encore φ. Comme $F_{\mathfrak{p}}$ est un $K_{\mathfrak{p}}$-espace vectoriel de dimension finie, il existe un nombre entier naturel n non nul tel que $n\varphi$ envoie $E_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$ dans $F_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$. D'après le théorème de la base adaptée, il existe des nombres entiers ℓ et m non nuls, il existe une base $(e_1, \dots, e_\ell)$ de $F_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$ et des nombres entiers $a_1, \dots, a_m$ tels que $(a_1 e_1, \dots, a_m e_m)$ soit une base de $\operatorname{Im}(n\varphi_{|E_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}})$.

Alors

$$\|n\varphi\|_{\mathfrak{p}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |a_i|_{\mathfrak{p}}.$$

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de L au-dessus de $\mathfrak{p}$. Alors

$$\|n\varphi \otimes_K L\|_{\mathfrak{q}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |a_i|_{\mathfrak{q}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |a_i|_{\mathfrak{p}}{}^{e_{\mathfrak{q}} f_{\mathfrak{q}}} = \|n\varphi\|_{\mathfrak{p}}{}^{e_{\mathfrak{q}} f_{\mathfrak{q}}}, \tag{1.9}$$

où $f_{\mathfrak{q}}$ est le degré d'inertie de $\mathfrak{q}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, $e_{\mathfrak{q}}$ l'indice de ramification et leur produit $e_{\mathfrak{q}} f_{\mathfrak{q}}$ est égal au degré local $[L_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_L, \\ \mathfrak{q} \mid \mathfrak{p}}} \log \|\varphi \otimes_K L\|_{\mathfrak{q}} &= \sum_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_L, \\ \mathfrak{q} \mid \mathfrak{p}}} [L_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] \log \|\varphi\|_{\mathfrak{p}} \\
&= \log \|\varphi\|_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{p}} [L_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] \\
&= \log \|\varphi\|_{\mathfrak{p}} [L:K].
\end{aligned}$$

□

1.3. Inégalités de pentes

L'inégalité de pentes, due à J.-B. Bost, est la suivante.

Proposition 1.9. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens et soit φ une application K-linéaire non nulle de E_K dans F_K. Si φ est injective, alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi).$$

Nous aurons besoin d'une « version filtrée » de cette inégalité de pentes, également due à J.-B. Bost. C'est un corollaire de l'inégalité précédente. C'est à cette inégalité que l'on fait généralement référence quand on parle de *l'inégalité de pentes.*

Proposition 1.10. — *Soient $\overline{E}$ un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien non nul et soit $(\overline{G}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de fibrés vectoriels hermitiens sur* $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_K$. *Soit F un K-espace vectoriel muni d'une filtration décroissante exhaustive $(F_K^k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout nombre entier naturel k, le quotient F_K^k/F_K^{k+1} est isomorphe à $G_{k,K}$. Soit φ une application K-linéaire injective de E_K dans F_K. Pour tout $k\in\mathbf{N}$, soit $E^k=\varphi^{-1}(F_K^k)$, et $\overline{E}^k$ le $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien induit sur E^k par la structure de $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien de E.*

Alors l'application φ induit une application K-linéaire injective

$$\varphi^k : E_K^k/E_K^{k+1} \hookrightarrow G_{k,K}$$

et

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) \leqslant \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathrm{rg}(E^k/E^{k+1}) \left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_k) + h(\varphi^k)\right). \tag{1.10}$$

1.4. Sections d'un fibré en droites ample

Soit X une variété projective de dimension n définie sur un corps de nombres K. Soit $\mathscr{X}$ un modèle projectif de X sur $\operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_K)$, c'est-à-dire un schéma projectif sur $\operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_K)$ dont la fibre générique $\mathscr{X}_K$ est isomorphe à X. Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathscr{X}$ dont la restriction $L=\mathscr{L}_K$ à X est ample.

Soit $\mathscr{E}_D := \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes D})$. C'est un $\mathfrak{o}_K$-module projectif de type fini. Définissons des métriques hermitiennes sur $\mathscr{E}_{D,\sigma}=\mathscr{E}_D\otimes_{\mathfrak{o}_K,\sigma}\mathbf{C}$, pour tout plongement $\sigma : K\hookrightarrow\mathbf{C}$. Définissons la norme $\|.\|_{\sigma,\infty}$ sur $\mathscr{E}_{D,\sigma}$ par

$$\|s\|_{\sigma,\infty} := \sup_{x\in\mathscr{X}_{K,\sigma}(\mathbf{C})} \|s(x)\|_\sigma.$$

Suivant H. Chen [Chen, 2009] et É. Gaudron [Gaudron, 2008] (paragraphe 4.2), considérons la *norme de John*, notée $\|.\|_{\sigma,J}$, associée à la norme $\|.\|_{\sigma,\infty}$. Cette norme est, parmi les normes euclidiennes plus grandes que $\|.\|_{\sigma,\infty}$, celle dont la boule unité a un volume minimal. On a entre ces normes la comparaison suivante :

$$\|.\|_{\sigma,\infty} \leqslant \|.\|_{\sigma,J} \leqslant \sqrt{\mathrm{rg}(E_D)}\|.\|_{\sigma,\infty}. \tag{1.11}$$

Ces normes munissent $\mathscr{E}_D$ d'une structure de fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathscr{E}_D}$ sur $\operatorname{Spec} o_K$.

Lemme 1.11. — *Lorsque D tend vers l'infini,*

$$\operatorname{rg}(E_D) \sim \deg_L(X) D^n. \tag{1.12}$$

Il existe un nombre réel $C > 0$ tel que

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D) \geqslant -C D^{n+1}. \tag{1.13}$$

L'équivalence (1.12) est le théorème de Hilbert-Samuel géométrique (voir par exemple [Bost, 2001] (4.19)). L'inégalité (1.13) est une version faible du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique. D'après la proposition 4.4 de [Bost, 2001], il existe un nombre réel $C_0 > 0$ tel que $\overline{\mathscr{E}}_D$ est engendré par un nombre fini de sections s dont les normes vérifient

$$\|s\|_{\sigma,\infty} \leqslant C_0^D.$$

D'après la partie droite de l'inégalité (1.11), les normes de John de ces sections vérifient donc :

$$\|s\|_{\sigma,J} \leqslant \sqrt{\operatorname{rg}(E_D)} C_0^D.$$

D'après le lemme 4.1 de [Bost, 2001], la pente maximale de $\overline{\mathscr{E}}_D$ vérifie par conséquent

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\overline{\mathscr{E}}_D) &\geqslant -D \log C_0 - \log \sqrt{\operatorname{rg} E_D} \\ &\geqslant -C_1 D, \end{aligned}$$

pour un nombre réel C_1 strictement positif, car le rang de E_D croît polynomialement d'après (1.12). Ainsi,

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D) &= \widehat{\mu}\, \overline{\mathscr{E}}_D \operatorname{rg} E_D \\ &\geqslant -C D^{n+1}, \end{aligned}$$

compte tenu du théorème de Hilbert-Samuel géométrique (1.12).

Soit $\overline{\mathscr{F}}$ un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien et soit φ une application K-linéaire de $\overline{\mathscr{E}} \otimes_{\mathfrak{o}_K} K = E = \Gamma(X, L^D)$ dans $F = \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$. Soit $h_J(\varphi)$ la hauteur de φ relativement à ces normes de John, c'est-à-dire $h_J(\varphi) = \sum_{\mathfrak{p}} \log \|\varphi\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|\varphi\|_{\sigma,J}$ où

$$\|\varphi\|_{\sigma,J} = \sup_{s \in E_\sigma \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(s)\|_{\sigma.}}{\|s\|_{\sigma,J}}.$$

Définissons également la hauteur $h(\varphi)$ obtenue en remplaçant les normes hermitiennes sur $\mathscr{E}_\sigma$ par la norme infinie,

$$h(\varphi) = \sum_{\mathfrak{p}} \log \|\varphi\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|\varphi\|_{\sigma,\infty},$$

où $\|\varphi\|_{\sigma,\infty} = \sup_{s \in E_\sigma \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(s)\|_{\sigma.}}{\|s\|_{\sigma,\infty}}$.

D'après la première inégalité de (1.11) de comparaison entre la norme infinie et la norme de John associée, pour toute place archimédienne σ de K on a $\|\varphi\|_{\sigma,J} \leqslant \|\varphi\|_{\sigma,\infty}$, et donc

$$h_J(\varphi) \leqslant h(\varphi). \tag{1.14}$$

CHAPITRE 2

RAPPELS SUR LES FEUILLETAGES

Dans ce chapitre, nous allons considérer des champs de plans involutifs définis soit sur une variété analytique M sur $\mathbf{C}$, soit sur une variété algébrique projective X définie sur un corps de nombres. Dans le cas analytique, ce sont des *feuilletages*. Ce chapitre a pour but de rappeler d'une part des résultats simples et classiques sur les feuilletages, et d'autre part d'expliquer qu'un champ de plans involutif sur X définit un « germe de feuille formelle » sur le complété formel de X en un point, et montrer des résultats analogues aux résultats classiques dans ce cadre formel.

En géométrie différentielle, ou analytique, il existe plusieurs définitions équivalentes de ce qu'est un feuilletage. Celle qui s'adapte au cas algébrique est la définition comme sous-fibré du fibré tangent.

Soit M une variété analytique de dimension n et soit X une variété algébrique projective de dimension n définie sur un corps de nombres K.

Définition 2.1. — *Un* champ de d-plans F *sur M (respectivement sur un ouvert U de X), ou un sous-fibré de rang d du fibré tangent TM (respectivement TU) est la donnée, pour tout $x \in M$ (respectivement, pour tout $x \in U$), d'un sous-espace vectoriel F_x de dimension d de l'espace tangent T_xM (respectivement T_xX), vérifiant de plus la condition suivante :*

tout point $x \in M$ (respectivement, $x \in U$) admet un voisinage V sur lequel il existe d champs de vecteurs $\xi^1, \ldots, \xi^d : V \to TM$ (respectivement $V \to TX$) tels que, pour tout $y \in U$, $(\xi^1(y), \ldots, \xi^d(y))$ forme une base de F_y.

Un champ de vecteurs ξ défini sur un ouvert U de M (respectivement, de X) est *tangent* au champ de d-plans F si pour tout $x \in U$, $\xi(x) \in F_x$.

Rappelons que la donnée d'un champ de vecteurs ξ sur M est équivalente à la donnée d'une dérivation D_ξ sur l'espace des fonctions analytiques de M dans $\mathbf{C}$. Soient ξ et η deux champs de vecteurs sur M. Le *crochet de Lie de ξ et η*, noté $[\xi, \eta]$ est un champ de vecteurs sur M. Il est défini comme le champ de vecteurs dont la dérivation associée vérifie

$$D_{[\xi,\eta]} = D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi.$$

Définition 2.2. — *Un champ F de d-plans sur un ouvert de X ou de M est* involutif *si, pour tous champs de vecteurs ξ, η tangents à F, le champ de vecteurs $[\xi,\eta]$ est aussi tangent à F.*

Définition 2.3. — *Soit M une variété analytique. Un sous-fibré F de TM est* (complètement) intégrable *s'il existe une sous-variété M' de M telle que, pour tout $x \in M'$, $T_xM' = F_x$.*

Définition 2.4. — *Un* feuilletage algébrique *de dimension d sur un ouvert U de X est un champ de d-plans involutif sur U.*

Le théorème de Frobenius donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité d'un champ de d-plans (voir par exemple [Lee, 2003] page 359, théorème 4.5 ou l'appendice de [Camacho et Lins Neto, 1985]).

***Théorème 2.5* (Frobenius).** — *Soit F un champ de d-plans sur un ouvert d'une variété analytique. Alors F est complètement intégrable si et seulement s'il est involutif.*

Soit X une variété projective de dimension n définie sur un corps de nombres K, et soit P un point lisse de $X(K)$. Soit V un ouvert de X contenant P, et soit F un champ de d-plans sur V. Supposons le champ F *involutif*, suivant la même définition (2.2) que dans le cas différentiel, c'est-à-dire supposons que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs tangents à F est encore tangent à F.

Nous allons définir dans ce chapitre la *feuille formelle de F* passant par P, sous-schéma formel du complété formel $\widehat{X}_P$ de X en P.

2.1. Champs de vecteurs et flots

2.1.1. Cas analytique. — Soit ξ un champ de vecteurs analytique sur une variété analytique M. Une courbe analytique $\gamma : J \to M$ définie sur un domaine J de $\mathbf{C}$ est une *courbe intégrale du champ ξ* si en tout point le vecteur tangent à γ est égal à la valeur de ξ en ce point : pour tout $t \in J$,

$$\gamma'(t) = \xi(\gamma(t)).$$

Soit x un point de M. Une courbe intégrale de ξ d'origine x est une courbe intégrale de ξ, $\gamma : J \to M$, telle que $0 \in J$ et $\gamma(0) = x$.

Soit D un ouvert de $\mathbf{C} \times M$. Pour tout $x \in M$, notons J_x l'ensemble des $t \in \mathbf{C}$ tels que $(t, x) \in D$. Un *flot de ξ de domaine D* est une application analytique φ de D dans M telle que, pour tout $x \in M$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x : J_x & \to & X \\ t & \mapsto & \varphi(t, x) \end{array}$$

soit une courbe intégrale de ξ, et pour tout $x \in M$ tel que $(0, x) \in D$ on ait $\varphi(0, x) = x$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout point $x \in M$ le champ ξ admet un flot analytique dont le domaine est un voisinage de $(0, x)$ dans $\mathbf{C} \times M$, et deux flots de ξ définis au voisinage de $(0, x)$ coïncident sur un voisinage de $(0, x)$.

Pour tout t on note ξ_t l'application $\xi_t(P) = \varphi(t, P)$, pour tout P tel que $t \in J_P$.

2.1.2. Flot formel. — Dans le cas formel, on peut aussi définir un *flot formel*, comme expliqué par J.-B. Bost dans [Bost, 2001].

Soit X une variété projective de dimension n définie sur un corps de nombres K, et soit $\mathscr{F}$ un feuilletage algébrique sur X, défini sur K. Soit P un point lisse de $X(K)$. Il existe un ouvert U de X, contenant P, et des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ régulières sur U tels que l'application $(x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbf{A}^n_K$ soit étale et envoie P sur 0.

Soit v un champ de vecteurs sur U tangent à F. On définit un *flot formel* associé à v

$$\varphi : \hat{\mathbf{A}}^1_K \times \widehat{X}_P \to \widehat{X}_P.$$

Le complété formel $\widehat{X}_P$ s'identifie, en termes des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$, avec le spectre formel de l'anneau de séries formelles $K[[x_1, \ldots, x_n]]$, et le flot formel φ s'identifie avec un élément de $K[[t, x_1, \ldots, x_n]]^n$, et φ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) = v(\varphi(t, x)).$$

Le champ de vecteurs v s'identifie à un élément de $K[[x_1, \ldots, x_n]]^n$. Notons D la dérivation définie par $v = (v_1, \ldots, v_n)$ sur $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ par $D(x_j) = v_j$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. La dérivation D agit également sur $K[[x_1, \ldots, x_n]]^n$ composante par composante. On définit le flot formel par

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \hat{\mathbf{A}}^1_K \hat{\times} \widehat{X}_P & \longrightarrow & \widehat{X}_P \\ & (t, x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} D^i(x_1, \ldots, x_n). \end{array} \tag{2.1}$$

Pour tout $t \in \hat{\mathbf{A}}^1_{K,0}$, on pose v_t l'application de $\widehat{X}_P$ dans lui-même donnée par $v_t = \varphi(t, .)$.

2.1.3. Action de flots commutatifs. — On dit que deux champs de vecteurs *commutent* si leur crochet de Lie est nul. Si deux champs de vecteurs commutent, leurs flots commutent également, au sens suivant.

Proposition 2.6. — *Soit M une variété différentielle. Soient K un corps de nombres et X une variété algébrique projective définie sur K. Soient $P \in X(K)$ et U un voisinage ouvert de P dans X.*

Soient ξ, η deux champs de vecteurs sur U ou sur M qui commutent. Alors

$$\xi_t \circ \eta_s = \eta_s \circ \xi_t.$$

Démonstration. — Dans le cas formel, cela découle du fait que, si D_ξ et D_η sont les dérivations associées à ξ et η, alors $0 = D_{[\xi,\eta]} = D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi$. Par conséquent, D_ξ et D_η commutent, et les flots définis par la relation (2.1) aussi.

Pour une démonstration dans le cas analytique, voir par exemple [Lee, 2003] ou [Camacho et Lins Neto, 1985]. □

Soient $v^1, \dots, v^d$ des champs de vecteurs sur M, ou sur un ouvert de X contenant $P \in X(K)$, qui commutent deux à deux. On peut alors définir le flot global (dans les cas classique et formel) en composant les flots associés aux champs de vecteurs $v_1, \dots, v_d$:

$$\varphi(t_1, \dots, t_d, x) \mapsto v^1_{t_1} \circ \cdots \circ v^d_{t_d}(x).$$

C'est une *action* de $\mathbf{C}^d$ sur M si le flot est défini globalement, ou une *action formelle* de $\hat{\mathbf{A}}^d_{K,0}$ sur $\widehat{X}_P$, car elle vérifie

$$\begin{aligned} &\varphi(0, x) = x, \\ \text{et}\quad &\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)). \end{aligned}$$

2.2. Champ de plans involutif

Soient M une variété analytique, et X une variété projective sur un corps de nombres K.

Proposition 2.7. — *Soit F un feuilletage de dimension d sur M (respectivement, sur X) et soit P un point de M (respectivement, un point de $X(K)$). Alors il existe un ouvert U de M (respectivement, de X) contenant P, et un repère de F sur U formé de champs de vecteurs qui commutent.*

Démonstration. — La démonstration de ce résultat dans le cas analytique est classique (voir par exemple l'appendice de [Camacho et Lins Neto, 1985], ou [Lee, 2003]). La même idée marche également dans le cas formel.

Soit F un champ de k-plans involutif de dimension d sur X. Il existe un ouvert V de X contenant P et $\xi^1, \dots, \xi^d$ un repère de F sur V, c'est-à-dire des champs de vecteurs tels que, pour tout $x \in V$, $\xi^1(x), \dots, \xi^d(x)$ engendrent l'espace vectoriel $F(x) \subset T_xV$. Quitte à restreindre V, on peut supposer que c'est un domaine de carte $x = (x_1, \dots, x_n) : V \to \mathbf{R}^n$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\xi^j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où $a_{i,j} \in \mathscr{O}(U)$. Notons A la matrice $[a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$. Pour tout $x \in V$, la matrice $A(x)$ est de rang d, car ses colonnes $\xi_1(x), \dots, \xi_d(x)$ sont linéairement indépendantes. Il existe donc une sous-matrice de taille $d \times d$ $B(P)$ de $A(P)$ inversible. Quitte à changer l'ordre des coordonnées locales x_j, on peut supposer que $B(P) = [a_{ij}(P)]_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$. Le déterminant de $B(P)$ est non nul, et l'application $x \mapsto \det(B(x))$ est régulière sur V, donc il existe un voisinage U de P dans V sur lequel $\det(B)$ est inversible. Notons c_{ij} les coefficients de la matrice B^{-1}, et soit

$$v^j = \sum_{i=1}^d c_{ij} \xi^i,$$

pour $1 \leqslant j \leqslant d$. Alors $v^j = \sum_{i=1}^d d_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$, où les $d_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant d$ sont les coefficients de la matrice AB^{-1}. On a donc, pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$,

$$v^j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=d+1}^n d_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.2}$$

Montrons que les champs de vecteurs v^j commutent. Soient $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $i \neq j$. Le crochet de Lie de v^i et v^j vaut, d'après l'égalité (2.2),

$$\begin{aligned}
[v^i, v^j] &= [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] + \sum_{k=d+1}^n [\frac{\partial}{\partial x_i}, d_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}] + \sum_{k=d+1}^n [d_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}] \\
&\quad + \sum_{k,l=d+1}^n [d_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}, d_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l}] \\
&= 0 + \sum_{k=d+1}^n e_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Comme F est involutif, il existe $f_1^{ij}, \dots, f_d^{ij}$ telles que

$$\sum_{k=d+1}^n e_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^d f_l^{ij} v^l.$$

D'après l'égalité (2.2),

$$\sum_{k=d+1}^{n} e_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{d} f_l^{ij} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{d} \sum_{l'=d+1}^{n} f_l^{ij} d_{l'l} \frac{\partial}{\partial x_{l'}},$$

d'où $f_1^{ij} = \cdots = f_d^{ij} = 0$, et donc $[v^i, v^j] = 0$. □

Remarque. — C'est le début de la démonstration du théorème de Frobenius « formel » (l'implication si le champ est involutif, alors il est complètement intégrable).

2.3. Paramétrage des feuilles formelles

Nous pouvons maintenant définir la feuille formelle d'un feuilletage sur X passant en un point, et en donner un paramétrage à l'aide du flot formel défini au paragraphe précédent, en suivant toujours l'idée de Bost dans [Bost, 2001].

Soit F un champ de d-plans involutif défini sur un ouvert U de X. Quitte à restreindre U, le champ F admet donc un repère constitué de d champs de vecteurs $v^1, \ldots, v^d$ qui commutent, d'après la proposition 2.7. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, soit $D_i = D_{v_i}$ la dérivation associée au champ de vecteur v_i. Les flots formels associés aux champs de vecteurs $v_1, \ldots, v_d$ commutent donc, et l'on peut définir le flot formel (voir le paragraphe 2.1.3)

$$\begin{array}{llll} & \psi : & \hat{\mathbf{A}}^d_{K,0} \times \widehat{X}_P \longrightarrow & \widehat{X}_P \\ (2.4) & & (t_1, \ldots, t_d, x_1, \ldots, x_n) \mapsto & \displaystyle\sum_{I \in \mathbf{N}^d} \frac{t^I}{I!} D^I(x_1, \ldots, x_n), \end{array}$$

où, pour $I = (i_1, \ldots, i_d)$ un d-uplet de nombres entiers naturels, $t^I = t_1^{i_1} \ldots t_d^{i_d}$, $I! = i_1! \ldots i_d!$ et D^I désigne la dérivation $D_1^{i_1} \ldots D_d^{i_d}$.

La *feuille formelle* $\widehat{V}$ *de* F *passant par* P ou *germe de feuille formelle de* F *en* P est le sous-schéma formel de $\widehat{X}_P$ image de ψ restreint à $\hat{\mathbf{A}}^d_{K,0} \times \{P\}$. En termes de coordonnées locales, $\widehat{V}$ est paramétré par les n séries formelles $\psi(t_1, \ldots, t_d, 0, \ldots, 0) \in K[[t_1, \ldots, t_d]]^n$.

Définissons $f : \hat{\mathbf{A}}^n_{K,0} \to \widehat{X}_P$, donné, en termes des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur $\widehat{X}_P$, par l'élément de $K[[t_1, \ldots, t_n]]^n$:

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \psi(t_1, \ldots, t_d, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0, t_{d+1}, \ldots, t_n). \tag{2.5}$$

On a alors

$$f^{-1}\widehat{V} = \hat{\mathbf{A}}^d_{K,0} \times \{0\}^{n-d}. \tag{2.6}$$

2.4. $\mathfrak{p}$-courbures

Remarquons que si D est une dérivation sur un anneau commutatif A de caractéristique p, d'après la formule de Leibniz sa composée p-ième D^p est encore une dérivation sur A.

Rappelons les notations des paragraphes précédents. Soit X une variété projective de dimension n définie sur un corps de nombres K et soit F un feuilletage algébrique sur un ouvert lisse U de X, défini sur K. Soit N un nombre entier naturel non nul tel qu'il existe un modèle lisse $\mathscr{U}$ de U sur $\mathfrak{o}_K[1/N]$ et un sous-fibré involutif $\mathscr{F}$ de $T\mathscr{U}$ de fibre générique F. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}_K[1/N]$, notons $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ son corps résiduel et p la caractéristique de $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$. On dira que $\mathscr{F}$ est *à $\mathfrak{p}$-courbure nulle* si le sous-fibré $\mathscr{F}\otimes\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ de $T(\mathscr{U}\otimes\mathbf{F}_\mathfrak{p})$ est stable par puissance p-ième.

Pour presque tout $\mathfrak{p}$, cette notion ne dépend pas des choix de $\mathscr{U}$ et de $\mathscr{F}$ que l'on a faits. Par abus, on dira alors que F est *à $\mathfrak{p}$-courbure nulle.*

CHAPITRE 3

SOUS-SCHÉMAS FORMELS α-ANALYTIQUES ET α-ARITHMÉTIQUES

Le premier paragraphe de ce chapitre définit et détaille la condition d'*α-analyticité* d'un sous-schéma formel, qui est une condition portant sur les coefficients des séries formelles paramétrant le sous-schéma formel. On définit ensuite les *morphismes d'évaluation* le long d'un sous-schéma formel. C'est à ces applications linéaires que l'on appliquera l'*inégalité de pentes*. Nous présentons ensuite la condition *α-arithmétique*, qui est impliquée par la condition *α-analytique*. C'est une majoration de la partie finie de la hauteur du morphisme d'évaluation le long du sous-schéma formel, hypothèse qui apparaîtra directement dans l'inégalité de pentes.

3.1. Sous-schémas formels α-analytiques

Cette notion de sous-schéma formel α-analytique est due à Gasbarri, c'est celle de *LG-germe de type* α dans son article [Gasbarri, 2010]. Nous donnons ici des détails sur cette condition.

3.1.1. Définitions. — Soit K un corps de nombres. D'après le lemme ci-dessous, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{A}}^n_{K,0})$ du complété formel de $\mathbf{A}^n_K$ en 0 s'identifie avec les n-uplets de séries formelles en n variables $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in K[[X_1, \dots, X_n]]$, tels que $f(0) = 0$ et

$$Df(0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Lemme 3.1. — *Soit A un anneau commutatif unitaire. Un n-uplet de séries formelles $f = (f_1, \dots, f_n)$ en n variables à coefficients dans A est inversible pour la composition si et seulement si $f(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$ et $Df(0) \in \mathrm{GL}_n(A)$.*

Démonstration. — Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal $(X_1, \dots, X_n)$ de $A[[X_1, \dots, X_n]]$. Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ avec, pour $i \in \{1, \dots, n\}, f_i \in A[[X_1, \dots, X_n]]$, telle que $f(0) = 0$ et $Df(0) \in \mathrm{GL}_n(A)$. Construisons une suite (g_k) de n-uplets de polynômes $g_k \in A[X_1, \dots, X_n]^n$ dont les n composantes sont de degré au plus k en chacune des variables, et

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= g_k && \mod \mathfrak{m}^{k+1}, \\ f(g_k) &= (X_1, \dots, X_n) && \mod \mathfrak{m}^{k+1}. \end{aligned}$$

Ces conditions entraînent la convergence de la suite (g_k) vers un élément g de $A[[X_1, \dots, X_n]]^n$ vérifiant $f(g(X_1, \dots, X_n)) = (X_1, \dots, X_n)$.

Posons $g_0 = 0$, et $g_1 = Df(0)^{-1}(X_1, \dots, X_n)$. Soit $k \in \mathbf{N}$, supposons les termes de la suite construits jusqu'au rang k. On cherche g_{k+1} de la forme

$$g_{k+1} = g_k + (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où $\lambda_i \in A[X_1, \dots, X_n]$ sont des polynômes homogènes de degré $k+1$. Alors, d'après la formule de Taylor à l'ordre 1,

$$\begin{aligned} f(g_{k+1}) &= f(g_k) + Df(0)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mod \mathfrak{m}^{k+2} \\ &= (X_1, \dots, X_n) + (a_1, \dots, a_n) + Df(0)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mod \mathfrak{m}^{k+2}, \end{aligned}$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des polynômes homogènes de degré $k+1$.

En choisissant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -Df(0)^{-1}(a_1, \dots, a_n)$, on a bien

$$f(g_{k+1}(X_1, \dots, X_n)) = (X_1, \dots, X_n) \mod \mathfrak{m}.$$

De même, l'automorphisme g admet un inverse à droite, qui est donc égal à son inverse à gauche, f. $\square$

Définition 3.2. — *Nous notons G_{an} le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{A}}^n_{K,0})$ formé des automorphismes formels $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{A}}^n_{K,0})$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les séries f_i ont un rayon de convergence strictement positif en toute place de K.*

Définition 3.3. — *Pour tout $a \geqslant 0$, nous notons $G_{\mathrm{an},a}$ le sous-ensemble des automorphismes formels $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{A}}^n_{K,0})$, $f_i = \sum_I f_{i,I} X^I$, tels qu'il existe un ensemble fini S de places de K contenant toutes les places archimédiennes et une famille de nombres réels positifs $(C_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \notin S}$ tels que*

$$\prod_{\mathfrak{p} \notin S} C_\mathfrak{p} < \infty,$$

et, pour tout $\mathfrak{p} \notin S$,

$$\|f_{i,I}\|_\mathfrak{p} \leqslant \frac{C_\mathfrak{p}^{|I|}}{\|I!\|_\mathfrak{p}^a}.$$

Soit X une variété algébrique projective de dimension n définie sur un corps de nombres K et P un point lisse de $X(K)$. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de dimension d du complété formel $\widehat{X}_P$ de X en P.

Théorème 3.4. — *À un tel triplet $(X, \widehat{V}, P)$ on peut associer de manière unique un nombre $\alpha(X, \widehat{V}, P)$ dans $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ tel que :*

1. *Si $(X, \widehat{V}, P) = (\mathbf{A}^n_K, \widehat{V}, (0, \ldots, 0))$, $\alpha(X, \widehat{V}, P)$ est la borne inférieure dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des $a \in \mathbf{R}_+$ tels qu'il existe $f \in G_{\mathrm{an},a}$ tel que $f^*\widehat{V} = \mathbf{A}^d$. (Si l'ensemble des tels a est vide, on pose $\alpha(X, \widehat{V}, P) = \infty$)*
2. *Si $X \to X'$ est une immersion fermée, alors $\alpha(X, \widehat{V}, P) = \alpha(X', \widehat{V}, P)$.*
3. *S'il existe un triplet $(X', \widehat{V}', P')$ et un morphisme $X \to X'$ étale en P, envoyant P sur P' et induisant un isomorphisme $\widehat{V} \simeq \widehat{V}'$, alors $\alpha(X, \widehat{V}, P) = \alpha(X', \widehat{V}', P')$.*

Démonstration. — Vérifions que les prescriptions (1),(2) et (3) déterminent $\alpha(X, \widehat{V}, P)$ pour tout triplet $(X, \widehat{V}, P)$. En effet, soient $(X, \widehat{V}, P)$ un triplet, U un ouvert de X contenant P, et $f : U \to \mathbf{A}^n_K$ un morphisme étale envoyant P sur 0. Alors, d'après le point 3., $\alpha(U, \widehat{V}, P) = \alpha(\mathbf{A}^n_K, f_*\widehat{V}, 0)$ qui est bien défini par la condition 1. Comme l'inclusion $(U, P) \hookrightarrow (X, P)$ est étale, on a aussi $\alpha(X, \widehat{V}, P) = \alpha(U, \widehat{V}, P)$ d'après le point 3.

Soit $f : U \to \mathbf{A}^n_K$ étale en P. Montrons que $\alpha(\mathbf{A}^n_K, f_*\widehat{V}, 0)$ ne dépend pas du choix d'un tel f. Il existe un modèle $\mathscr{U}$ de U, de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}]$, et un morphisme étale $\phi \colon \mathscr{U} \to \mathbf{A}^n_{\mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}]}$ dont la restriction à la fibre générique est f et tel que le point rationnel P s'étend en une section $\mathscr{P}$ du morphisme $\mathscr{U} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}]$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}] \arrow[r] \arrow[u, bend left, "\mathscr{P}"] & \operatorname{Spec} K
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme étale induit un *isomorphisme* de schémas formels $\hat{\phi} : \hat{\mathscr{U}}_{\mathscr{P}} \to \hat{\mathbf{A}}^n_{\mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}],0}$ (voir par exemple [Liu, 2002], 4.3.2. prop 3.26).

Si f et g sont deux morphismes de U dans $\mathbf{A}^n_K$ étales en P, on peut choisir ϕ et γ comme ci-dessus, définis sur le même modèle $\mathscr{U}$. Alors $\hat{\gamma} \circ \hat{\phi}^{-1} \in \mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}][[X_1, \ldots, X_n]]^n$, en inversant formellement ϕ à l'aide du lemme 3.1.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{A}^n_K \\ \mathbf{A}^n_K & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hat{\mathscr{U}}_P \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d, "\hat{\gamma}"] & \hat{\mathbf{A}}^n_{\mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}],0} \arrow[dl, "\hat{\gamma}\circ\hat{\phi}^{-1}"] \\ \hat{\mathbf{A}}^n_{\mathfrak{o}_K[\frac{1}{N}],0} & \end{tikzcd}$$

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K$ qui ne contient aucun facteur premier de N, la norme $\mathfrak{p}$-adique des coefficients de $\hat{g}\circ\hat{f}^{-1}$ est inférieure ou égale à 1, et donc $\alpha(\mathbf{A}^n_K, f_*\widehat{V}, 0) = \alpha(\mathbf{A}^n_K, g_*\widehat{V}, 0)$. □

Définition 3.5. — *Soit un triplet $(X, \widehat{V}, P)$ comme précédemment, et soit α un nombre réel positif. On dira que le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est* α-analytique *si $\alpha \geqslant \alpha(X, \widehat{V}, P)$.*

3.1.2. Cas d'un feuilletage algébrique. —

Lemme 3.6. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres K, soit P un point K-rationnel lisse de X. Soit F un feuilletage algébrique sur un ouvert de X contenant P et soit $\widehat{V}$ le germe de feuille formelle défini par F au voisinage de P.*

Alors $\widehat{V}$ est 1-analytique.

Démonstration. — Rappelons les notations du paragraphe 2.3 sur les feuilles formelles d'un feuilletage algébrique et leur paramétrage. Il existe un ouvert U de X contenant P et des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ régulières sur U tels que l'application $(x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbf{A}^n_K$ soit étale et envoie P sur 0. On identifie $\widehat{X}_P$ avec $\hat{\mathbf{A}}^n_{K,0} = \operatorname{Spf} K[[x_1, \ldots, x_n]]$ via les « coordonnées locales » $\hat{x}_j$. Soit $(v^1, \ldots, v^d)$ une base de F sur un voisinage ouvert V de P formée de champs de vecteurs $v^j \in \mathfrak{o}_K[[x_1, \ldots, x_n]]^n$ qui commutent deux à deux (une telle base existe d'après la proposition 2.7). Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, soit D_j la dérivation sur $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ associée à v^j, et pour tout multi-indice $I = (i_1, \ldots i_d) \in \mathbf{N}^d$, notons D^I l'opérateur différentiel $D_1^{i_1} \ldots D_d^{i_d}$ et $I! = \prod_{j=1}^d i_j!$.

La feuille formelle $\widehat{V}$ de F passant par le point P est paramétrée par $\psi : \hat{\mathbf{A}}^d_{K,0} \times \widehat{X}_P \longrightarrow \widehat{X}_P$ défini par

$$\psi(t_1, \ldots, t_d, 0, \ldots, 0) = \sum_{I \in \mathbf{N}^d} \frac{t^I}{I!} D^I(x_1, \ldots, x_n)(P), \tag{2.4}$$

où $t^I = \prod_{j=1}^d t_j^{i_j}$.

Soit f le morphisme $f : \hat{\mathbf{A}}^n_{K,0} \to \widehat{X}_P$ donné, en termes des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur $\widehat{X}_P$, par

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \psi(t_1, \ldots, t_d, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0, t_{d+1}, \ldots, t_n). \tag{2.5}$$

Il vérifie $f^{-1}\widehat{V} = \hat{\mathbf{A}}^d_{K,0} \times \{0\}^{n-d}$. Pour montrer que le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est 1-analytique, il suffit de prouver que $f \in G_{\mathrm{an},1}$. Pour cela, il suffit de majorer les coefficients du paramétrage $\psi(t_1, \ldots, t_d, 0, \ldots, 0)$.

Pour tout $I \in \mathbf{N}^d$,

$$D^I : \mathfrak{o}_K[[x_1, \ldots, x_n]] \to \mathfrak{o}_K[[x_1, \ldots, x_n]].$$

On a donc

$$\left| \frac{1}{I!} D^I(x_1, \ldots, x_n)(P) \right|_{\mathfrak{p}} = |I!|_{\mathfrak{p}}^{-1} |D^I(x_1, \ldots, x_n)(P)|_{\mathfrak{p}} \leqslant |I!|_{\mathfrak{p}}^{-1}, \tag{3.1}$$

ce qui démontre que $\widehat{V}$ est 1-analytique. □

Remarque. — Cette majoration vérifiée par les coefficients d'un paramétrage de $\widehat{V}$ est meilleure que l'hypothèse 1-analytique. En effet, pour presque toute place $\mathfrak{p}$ ces coefficients sont inférieurs à $\frac{C_{\mathfrak{p}}}{|I!|_{\mathfrak{p}}}$ avec $C_{\mathfrak{p}} = 1$.

Lemme 3.7. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres K, soit P un point K-rationnel lisse de X. Soit F un feuilletage algébrique sur un ouvert de X contenant P et soit $\widehat{V}$ le germe de feuille formelle défini par F au voisinage de P. Supposons que presque toutes les $\mathfrak{p}$-courbures de F sont nulles (c'est-à-dire toutes sauf un nombre fini).*

Alors $\widehat{V}$ est 0-analytique.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}_K$, et p le nombre premier tel que $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbf{Z}$. Notons f le degré résiduel, degré de l'extension de corps $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$ sur $\mathbf{F}_p$ de sorte que $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p} = \mathbf{F}_{p^f}$. Soit $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ le complété de $\mathfrak{o}_K$ pour la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique. Soit ϖ une uniformisante de $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $(p) = (\varpi)^e$ où e est l'indice de ramification absolu.

Soit $I = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbf{N}^d$. La dérivation $D^I = D_1^{i_1} \ldots D_d^{i_d}$ agit sur $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[[x_1, \ldots, x_n]]^n$. Si de plus la $\mathfrak{p}$-courbure est nulle (voir le paragraphe 2.4), D_i^p applique $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[[x_1, \ldots, x_n]]^n$ dans $\varpi\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[[x_1, \ldots, x_n]]^n$. Soit $g \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[[x_1, \ldots, x_n]]^n$. Pour $1 \leqslant j \leqslant d$, écrivons $i_j = q_j p + r_j$ la division euclidienne de i_j par p et posons $q = \sum_{j=1}^d q_j$. Alors

$$\begin{aligned} D^I(g) &= D_1^{q_1 p + r_1} \ldots D_d^{q_d p + r_d}(g) \\ &= (D_1^p)^{q_1} D_1^{r_1} \ldots (D_d^p)^{q_d} (D_d^{r_d}(g)), \end{aligned}$$

donc $D^I(g) \in \varpi^q \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[[x_1, \ldots, x_n]]^n$.

Le germe de feuille formelle défini par le feuilletage au voisinage de P (voir paragraphe 2.3) est paramétré par

$$\psi(t_1,\dots,t_d,x_1(P),\dots,x_n(P)) = \sum_{I\in\mathbf{N}^d} \frac{t^I}{I!} D^I X(P),$$

où $X=(x_1,\dots,x_n)$.

Majorons les coefficients du paramétrage ψ,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{I!}D^I X(0)\right|_{\mathfrak{p}} &\leqslant |I!|_{\mathfrak{p}}^{-1}|\varpi|_{\mathfrak{p}}^{q} \\
&\leqslant p^{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]v_p(i_1!\dots i_d!)}p^{-\frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]}{e}q} \\
&\leqslant p^{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\left(\sum_{j=1}^d v_p(i_j!)-\frac{1}{e}\lfloor\frac{i_j}{p}\rfloor\right)}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Rappelons la normalisation choisie pour la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique. Soit ϖ une uniformisante en $\mathfrak{p}$, on a :

$$|p|_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-e} = p^{-[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]},$$

$$|\varpi|_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-1} = p^{-f} = p^{-\frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]}{e}}.$$

Lemme 3.8. — *Soit a un nombre entier naturel. Alors*

$$v_p(a!) - \left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor \leqslant \frac{a}{p(p-1)}.$$

Démonstration. — La valuation p-adique de $a!$ est $v_p(a!) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{a}{p^k}\right\rfloor$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière inférieure.

Ainsi,

$$v_p(a!) - \left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor = \sum_{k=2}^{\infty}\left\lfloor\frac{a}{p^k}\right\rfloor \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{a}{p^k} \leqslant \frac{a}{p(p-1)}.$$

□

Si $e=1$, d'après la majoration donnée par le lemme ci-dessus et l'inégalité (3.2), on a la majoration suivante,

$$\left|\frac{1}{I!}D^I X(0)\right|_{\mathfrak{p}} \leqslant p^{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\sum_{j=1}^d\frac{i_j}{p(p-1)}} \leqslant p^{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\frac{|I|}{p(p-1)}} = |p|_{\mathfrak{p}}^{-\frac{|I|}{p(p-1)}}. \qquad (3.3)$$

Soit S l'ensemble fini des idéaux $\mathfrak{p}$ ramifiés. Pour tout $\mathfrak{p}\notin S$, l'indice de ramification e vaut 1, et l'inégalité (3.3) est valable. Posons, pour $\mathfrak{p}\notin S$,

$$C_{\mathfrak{p}} = p^{\frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]}{p(p-1)}}.$$

Alors la somme
$$\sum_{\mathfrak{p}\notin S} \log C_{\mathfrak{p}} = \sum \frac{\log p}{p(p-1)}[K_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Q}_p]$$
converge, et
$$\left| \frac{1}{I!} D^I X(0) \right|_{\mathfrak{p}} \leqslant C_{\mathfrak{p}}^{|I|},$$
donc $\widehat{V}$ est 0-analytique. $\square$

3.2. Morphismes d'évaluation

Soit X une variété projective sur K, de dimension $d > 1$. Soit $P \in X(K)$ et soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse (de dimension d) du complété formel $\widehat{X}_P$ de X en P. Pour tout nombre entier naturel k, notons $(V)_k$ le k-ième voisinage infinitésimal de P dans $\widehat{V}$. On a ainsi
$$\begin{gathered} \{P\} = (V)_0, \\ (V)_k \subset (V)_{k+1}, \\ \widehat{V} = \varinjlim_k (V)_k. \end{gathered}$$
Soit L un fibré en droites ample sur X. Définissons les K-espaces vectoriels et applications K-linéaires suivants, pour tous entiers naturel D, k :
$$E_D = \Gamma(X, L^{\otimes D}),$$
$$\begin{aligned} \eta_D : E_D &\to \Gamma(\widehat{V}, L^D) \\ s &\mapsto s_{|\widehat{V}}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \eta_D^k : E_D &\to \Gamma((V)_k, L^D) \\ s &\mapsto s_{|(V)_k}. \end{aligned}$$
Si le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est dense dans X, l'application η_D est injective. Les espaces vectoriels
$$E_D^k = \ker \eta_D^{k-1} = \{s \in \Gamma(X, L^{\otimes D}) \mid s_{|(V)_{k-1}} = 0\}$$
définissent une filtration de l'espace vectoriel E_D.

Le noyau de l'application de restriction de $\Gamma((V)_k, L^D)$ à $\Gamma((V)_{k-1}, L^D)$ est isomorphe à $\mathrm{Sym}^k\left(\Omega^1_{\hat{V}}\right) \otimes L_P^D$ (voir [Viada, 2001], paragraphe 4.2.5 ou [Viada, 2005], paragraphe 2.2). L'application η_D^k restreinte à E_D^k induit donc une application linéaire
$$\varphi_D^k : E_D^k \longrightarrow \mathrm{Sym}^k\left(\Omega^1_{\hat{V}}\right) \otimes L_P^D, \tag{3.4}$$

qui envoie une section de L^D s'annulant à l'ordre k en les P le long des $\widehat{V}$ sur le $(k+1)$-ième « coefficient de Taylor » de sa restriction à $\widehat{V}$. Par définition, le noyau de φ_D^k est égal à E_D^{k+1}.

3.3. Structures entières, structures hermitiennes

Soit $\mathscr{X}$ un modèle projectif de X sur $\operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_K)$, c'est-à-dire un schéma projectif sur $\operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_K)$ dont la fibre générique $\mathscr{X}_K$ est isomorphe à X. Le point rationnel P s'étend en une section $\mathscr{P}$ du morphisme $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$. Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathscr{X}$ dont la restriction $L = \mathscr{L}_K$ à X est ample.

Soit $\mathscr{E}_D := \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes D})$. C'est un $\mathfrak{o}_K$-module projectif de type fini. Notons $\check{\mathfrak{t}}_P\widehat{V}$ l'image de $\mathscr{P}^*\Omega^1_{\mathscr{X}/\mathfrak{o}_K}$ par l'application

$$\mathscr{P}^*\Omega^1_{\mathscr{X}/\mathfrak{o}_K} \to \left(\mathscr{P}^*\Omega^1_{\mathscr{X}/\mathfrak{o}_K}\right)_K \simeq \Omega^1_{X/K,P} \to (T_P\widehat{V})^\vee.$$

La restriction à K du $\mathfrak{o}_K$-module projectif de type fini $\check{\mathfrak{t}}_P\widehat{V}$ est isomorphe à $T_P\widehat{V}^\vee$. Muni des métriques duales des métriques $\|.\|_\sigma$ sur les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels $T_P\widehat{V} \otimes_{\mathfrak{o}_K,\sigma} \mathbf{C}$, $\check{\mathfrak{t}}_P\widehat{V}$ définit un fibré vectoriel hermitien $\overline{\check{\mathfrak{t}}_P\widehat{V}}$ sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$. Ses puissances symétriques héritent naturellement d'une structure de $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien ; pour tout nombre entier naturel k, nous notons $\|\cdot\|_{\sigma,\mathrm{Sym},k}$ la norme sur $\operatorname{Sym}^k(T_P\widehat{V})^\vee$ associée à un plongement σ de K dans $\mathbf{C}$.

Comme expliqué au paragraphe 1.4, on munit $\mathscr{E}_D$ d'une structure de fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathscr{E}_D}$ sur $\operatorname{Spec} o_K$ en munissant, pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbf{C}$, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{E}_{D,\sigma} = \mathscr{E}_D \otimes_{\mathfrak{o}_K,\sigma} \mathbf{C}$ de la *norme de John* $\|\cdot\|_{\sigma,J}$ associée à la norme-infini.

Définissons également la hauteur $h(\varphi_D^k)$ obtenue en remplaçant les normes hermitiennes sur $\mathscr{E}_{D,\sigma}$ par la norme infinie,

$$h(\varphi_D^k) = \sum_{\mathfrak{p}} \log \|\varphi_D^k\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|\varphi_D^k\|_{\sigma,\infty},$$

où $\|\varphi_D^k\|_{\sigma,\infty} = \sup_{s \in E^k_{D,\sigma}\setminus\{0\}} \frac{\|\varphi_D^k(s)\|_{\sigma\,\mathrm{Sym},k}}{\|s\|_{\sigma,\infty}}$.

D'après (1.11), on a

$$h_J(\varphi_D^k) \leqslant h(\varphi_D^k). \tag{3.5}$$

3.4. Sous-schémas formels α-arithmétiques

Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K, soit P un point K-rationnel de X et soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit L

un fibré en droites ample sur X. Pour tout couple de nombres entiers naturels (k, D), notons $\varphi^k_{D,\widehat{V}}$ le morphisme d'évaluation associé

$$\varphi^k_{D,\widehat{V}} : E^k_{D,\widehat{V}} \to \mathrm{Sym}^k\left(\Omega^1_{\widehat{V}}\right) \otimes L^D_{|P},$$

où $E^k_{D,\widehat{V}} = \{s \in H^0(X, L^D) \mid s_{|(V)_{k-1}} = 0\}$.

Définition 3.9. — *Soient α un nombre réel positif et S un ensemble fini de places de K (finies ou archimédiennes). Un sous-schéma formel lisse $\widehat{V}$ est* (S, α)-arithmétique *si pour tout $\overline{\alpha} > \alpha$, il existe $C > 0$ et une famille de nombre réels positifs $(C_v)_{v\in\Sigma_K}$ tels que, pour tous nombres entiers naturels D et k, le morphisme d'évaluation $\varphi^k_{D,\widehat{V}}$ vérifie*

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v\in\Sigma_K\setminus S} h_v(\varphi^k_{D,\widehat{V}}) \leqslant \overline{\alpha} k \log k + C(k + D), \tag{3.6}$$

et, pour toute place v de K,

$$h_v(\varphi^k_{D,\widehat{V}}) \leqslant C_v(k + D).$$

Définition 3.10. — *Soit α un nombre réel positif. Un sous-schéma formel lisse $\widehat{V}$ est* α-arithmétique *s'il est (S, α)-arithmétique pour tout ensemble fini S de places de K.*

Lemme 3.11. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres K, soit P un point K-rationnel de X et soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit K' une extension finie de K et soit α un nombre réel positif.*

Alors le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est α-arithmétique si et seulement si $\widehat{V} \otimes_K K'$ est α-arithmétique.

Démonstration. — Notons φ^k_D les morphismes d'évaluation le long de $\widehat{V}$. Alors les morphismes d'évaluation le long de $\widehat{V} \otimes_K K'$ sont les $\varphi^k_D \otimes_K K'$. Notons $\pi : \mathrm{Spec}\, \mathfrak{o}_{K'} \to \mathrm{Spec}\, \mathfrak{o}_K$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}_{K'}$ et $\mathfrak{p} = \pi(\mathfrak{q})$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_K$ sous $\mathfrak{q}$. Alors, d'après (1.9)

$$h_{\mathfrak{q}}(\varphi^k_D \otimes_K K') = [K'_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] h_{\mathfrak{p}}(\varphi^k_D). \tag{3.7}$$

Soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Supposons que le sous-schéma formel $\widehat{V}$ soit α-arithmétique. Soit S' un ensemble fini de places de K'. On a

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\Sigma_{K'}\setminus S'} h_v(\varphi^k_D \otimes_K K') &= \sum_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{o}_{K'}\setminus S'} h_{\mathfrak{q}}(\varphi^k_D \otimes_K K') + \sum_{\substack{\sigma:K'\hookrightarrow\mathbf{C}\\ \sigma\notin S'}} h_\sigma(\varphi^k_D \otimes_K K') \\ &= \sum_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{o}_{K'}\setminus S'} h_{\mathfrak{q}}(\varphi^k_D \otimes_K K') + \sum_{\substack{\sigma:K'\hookrightarrow\mathbf{C}\\ \sigma\notin S'}} h_{\sigma_{|K}}(\varphi^k_D).\end{aligned}$$

Comme $\widehat{V}$ est α-arithmétique, pour toute place v de K il existe $C_v > 0$ tel que

$$h_v(\varphi_D^k) \leqslant C_v(k+D). \tag{3.8}$$

La deuxième somme de l'égalité ci-dessus étant une somme finie, il existe donc $C_1 > 0$ tel que

$$\sum_{v\in\Sigma_{K'}\setminus S'} h_v(\varphi_D^k \otimes_K K') \leqslant \sum_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_{K'}\setminus S'} h_{\mathfrak{q}}(\varphi_D^k \otimes_K K') + C_1(k+D). \tag{3.9}$$

D'autre part, la somme sur les places finies peut être majorée de la manière suivante. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_{K'}\setminus S'} h_{\mathfrak{q}}(\varphi_D^k \otimes_K K') &= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \mathfrak{p}\notin\pi(S')}} \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \pi(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}}} h_{\mathfrak{q}}(\varphi_D^k \otimes K') \\
&\quad + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K\\ \mathfrak{p}\in\pi(S')}} \sum_{\substack{\pi(\mathfrak{q})=\mathfrak{p},\\ \mathfrak{q}\notin S'}} h_{\mathfrak{q}}(\varphi_D^k \otimes_K K') \\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \mathfrak{p}\notin\pi(S')}} \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \pi(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k)[K'_{\mathfrak{q}}:K_{\mathfrak{p}}] \\
&\quad + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \mathfrak{p}\in\pi(S')}} \sum_{\substack{\pi(\mathfrak{q})=\mathfrak{p},\\ \mathfrak{q}\notin S'}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k)[K'_{\mathfrak{q}}:K_{\mathfrak{p}}],
\end{aligned}$$

d'après (3.7). La deuxième somme est une somme finie, donc d'après (3.8), il existe un nombre réel $C_2 > 0$ tel que

$$\sum_{\substack{\pi(\mathfrak{q})=\mathfrak{p},\\ \mathfrak{q}\notin S'}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k)[K'_{\mathfrak{q}}:K_{\mathfrak{p}}] \leqslant C_2(k+D).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_{K'}\setminus S'} h_{\mathfrak{q}}(\varphi_D^k \otimes_K K') &\leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \mathfrak{p}\notin\pi(S')}} \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \pi(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k)[K'_{\mathfrak{q}}:K_{\mathfrak{p}}] \\
&\quad + C_2(k+D) \\
&\leqslant [K':K] \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_K,\\ \mathfrak{p}\notin\pi(S')}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) + C_2(k+D) \\
&\leqslant C_3(k+D) + [K':K][K:\mathbf{Q}]\overline{\alpha}k\log k \\
&\leqslant C_3(k+D) + [K':\mathbf{Q}]\overline{\alpha}k\log k,
\end{aligned}$$

puisque le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est α-arithmétique. D'après (3.9), en posant $C_4 = C_1 + C_3$ on a donc, pour tous nombres entiers $k \geqslant 0$ et $D \geqslant 1$,

$$\sum_{v\in\Sigma_{K'}\setminus S'} h_v(\varphi_D^k \otimes_K K') \leqslant C_4(k+D) + \overline{\alpha}[K':\mathbf{Q}]k\log k,$$

ce qui démontre que $\widehat{V} \otimes_K K'$ est α-arithmétique.

Supposons maintenant que $\widehat{V}\otimes_K K'$ est α-arithmétique. Soit S un ensemble fini de places de K. On a

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\Sigma_K\setminus S} h_v(\varphi_D^k) &= \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\setminus S} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) + \sum_{\substack{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C},\\ \sigma\notin S}} h_\sigma(\varphi_D^k)\\ &= \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\setminus S} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) + \sum_{\substack{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C},\\ \sigma\notin S}} h_{\tilde\sigma}(\varphi_D^k\otimes_K K'),\end{aligned} \tag{3.10}$$

où pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}$, $\tilde\sigma$ désigne un plongement de K' dans $\mathbf{C}$ prolongeant σ. Comme le sous-schéma formel $\widehat{V}\otimes_K K'$ est α-arithmétique, il existe un nombre réel $C_5>0$ tel que

$$\sum_{\substack{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C},\\ \sigma\notin S}} h_{\tilde\sigma}(\varphi_D^k\otimes_K K') \leqslant C_5(k+D). \tag{3.11}$$

Dans l'égalité (3.10), la somme sur les places finies vérifie d'après le lemme 1.8 :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\setminus S} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) &= \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\setminus S} \frac{1}{[K':K]} \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_{K'}\\ \mathfrak{q}|\mathfrak{p}}} h_{\mathfrak{q}}(\varphi_D^k\otimes_K K')\\ &= \frac{1}{[K':K]}\sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_{K'},\\ \mathfrak{q}\notin\pi^{-1}(S)}} h_{\mathfrak{q}}(\varphi_D^k\otimes_K K')\\ &\leqslant \frac{[K':\mathbf{Q}]}{[K':K]}\overline{\alpha}k\log k + C_6(k+D),\end{aligned}$$

car $\widehat{V}\otimes_K K'$ est α-arithmétique. Ainsi, d'après (3.10) et (3.11),

$$\sum_{v\in\Sigma_K\setminus S} h_v(\varphi_D^k) \leqslant \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]k\log k + (C_5+C_6)(k+D).$$

Par conséquent, le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est α-arithmétique. □

Le morphisme d'évaluation défini au paragraphe 3.2 et que l'on a noté φ_D^k dépend d'un choix du fibré en droites L sur X, d'un modèle entier de X et L sur $\mathfrak{o}_K$.

Les propositions suivantes entraînent que le fait, pour un sous-schéma formel, de vérifier la définition 3.10 ne dépend pas de ces choix. Les arguments sont inspirés de l'article [Bost et Chambert-Loir, 2009], proposition 4.7.

L'indépendance du choix des modèles se démontre exactement comme dans la partie a) de cette proposition ; un changement de modèle ne modifie le membre de gauche que par un facteur majoré par $C(k+D)$. Traitons maintenant l'indépendance en le fibré en droites. Indiquons en indice par rapport à quel fibré en droites le morphisme d'évaluation est défini : notons ainsi, pour tous nombres entiers naturels k, D, $E_{D,L} = \Gamma(X, L^{\otimes D})$ et $\varphi^k_{D,L}$ le morphisme d'évaluation $E^k_D \to \mathrm{Sym}^k(\Omega^1_{\widehat{V}_P}) \otimes L^{\otimes D}_{|P}$.

Proposition 3.12. — 1. *Soit b un nombre entier naturel non nul, et soit L un fibré ample sur X. Si $\varphi^k_{D,L}$ vérifie l'inégalité (3.6), alors $\varphi^k_{D,L^{\otimes b}}$ aussi.*

2. *Soient L et M deux fibrés en droites sur X. Supposons qu'il existe une section $\sigma \in \Gamma(X, M \otimes L^{-1})$ qui ne s'annule pas en P. Alors il existe $C > 0$ tel que $\|\varphi^k_{D,L}\|_\mathfrak{p} \leqslant \|\varphi^k_{D,M}\|_\mathfrak{p} C^D$.*

Démonstration. — 1. Le morphisme d'évaluation défini par rapport au fibré $L^{\otimes b}$,

$$\varphi^k_{D,L^{\otimes b}} : E^k_{D,L^b} \to \mathrm{Sym}^k(\Omega^1_{\widehat{V}_P}) \otimes L^{\otimes Db}_{|P},$$

coïncide avec φ^k_{bD}. Leurs normes sont donc égales, $\|\varphi^k_{D,L^b}\|_\mathfrak{p} = \|\varphi^k_{bD,L}\|_\mathfrak{p}$. Si $\varphi^k_{D,L}$ vérifie

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\mathfrak{p}} \log \|\varphi^k_D\|_\mathfrak{p} \leqslant \overline{\alpha} k \log k + C(k+D), \tag{3.12}$$

alors, quitte à remplacer C par bC, $\varphi^k_{D,L^{\otimes b}}$ vérifie la même inégalité.

2. Soit $s \in E^k_{D,L}$ une section s'annulant à l'ordre au moins k le long de $\widehat{V}$. Alors $s \otimes \sigma^D \in E^k_{D,M}$. De plus,

$$\varphi^k_{D,M}(s \otimes \sigma^D) = \varphi^k_{D,L}(s) \otimes \sigma(P)^D.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\varphi^k_{D,L}(s)\| &= \|\varphi^k_{D,M}(s \otimes \sigma^D)\| \cdot \|\sigma(P)\|^{-D} \\ &\leqslant \|\varphi^k_{D,M}\| \cdot \|s \otimes \sigma^D\| \cdot \|\sigma(P)\|^{-D} \\ &\leqslant \|\varphi^k_{D,M}\| \cdot \|s\| \left(\|\sigma\|\|\sigma(P)\|^{-1}\right)^D \\ &\leqslant \|\varphi^k_{D,M}\| \cdot \|s\| C^D, \end{aligned}$$

en posant $C = \|\sigma\|\|\sigma(P)\|^{-1}$.

$\square$

Proposition 3.13. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres K, soit P un point K-rationnel lisse de X et soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+$.*

Si $\widehat{V}$ est α-analytique, alors $\widehat{V}$ est α-arithmétique.

Démonstration. — Notons d la dimension de $\widehat{V}$, et notons $\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{o}_K)$ le spectre maximal de $\mathfrak{o}_K$. Supposons que $\widehat{V}$ est α-analytique et soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Alors $\widehat{V}$ est paramétré par des séries formelles $f_1, \dots, f_n \in K[[x_1, \dots, x_d]]$, $f_i = \sum_I a_I(i) x^I$, qui, en toute place, ont un rayon de convergence non nul et vérifient : il existe un ensemble fini S de places de K contenant toutes les places archimédiennes telles que, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{o}_K) \setminus S$, il existe $C_{\mathfrak{p}} > 0$ tel que, pour tout $I \in \mathbf{N}^d$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$|a_I(i)|_{\mathfrak{p}} \leqslant \frac{C_{\mathfrak{p}}^{|I|}}{\|I!\|_{\mathfrak{p}}^{\overline{\alpha}}}, \tag{3.13}$$

et

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{o}_K) \setminus S} C_{\mathfrak{p}} < +\infty.$$

Pour toute place v de K, il existe un nombre réel $C'_v > 0$ nul pour presque tout v tel que

$$h_v(\varphi_D^k) \leqslant C'_v(k + D) + \log \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \max_{|I| = k} |a_I(i)|_v \right). \tag{3.14}$$

Pour majorer la hauteur de φ_D^k, on utilise l'inégalité (3.13) pour la majoration de la hauteur en toutes les places $v \in \Sigma_K \backslash S$, et l'analyticité des séries $f_1, \dots, f_d$ fournit une majoration simple de $h_v(\varphi_D^k)$ en les places v de l'ensemble fini S.

D'après les inégalités (3.14) et (3.13),

$$h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \leqslant C'_{\mathfrak{p}}(k + D) + \log \max_{I \in \mathbf{N}^d,\ |I| = k} \frac{C_{\mathfrak{p}}^{|I|}}{\|I!\|_{\mathfrak{p}}^{\overline{\alpha}}}.$$

Si $I = (i_1, ..., i_d) \in \mathbf{N}^d$ est tel que $|I| = k$, alors $k!/i_1!...i_d!$ est un nombre entier, donc

$$\frac{1}{\|I!\|_{\mathfrak{p}}} \leqslant \frac{1}{|k!|_{\mathfrak{p}}}.$$

Alors,

$$\log \|\varphi_D^k\|_{\mathfrak{p}} \leqslant C'_{\mathfrak{p}}(k + D) + k \log C_{\mathfrak{p}} - \overline{\alpha} \log |k!|_{\mathfrak{p}}.$$

Si $C = \log \prod_{\mathfrak{p}\notin S} C_{\mathfrak{p}}$ et $C' = \sum C'_{\mathfrak{p}}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_K\setminus S} \log \|\varphi_D^k\|_{\mathfrak{p}} &\leqslant C'(k+D) + Ck - \overline{\alpha} \sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_K\setminus S} \log |k!|_{\mathfrak{p}} \\
&\leqslant C''(k+D) - \overline{\alpha} \sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_K\setminus S} \log |k!|_{\mathfrak{p}}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Soit v une place de K. Soit $r_v(i)$ un nombre réel strictement positif et strictement inférieur au rayon de convergence de f_i. Alors $|a_I(i)|_v r_v(i)^{|I|} \to 0$ quand $|I|$ tend vers l'infini, et il existe donc un nombre réel strictement positif C_v tel que

$$h_v(\varphi_D^k) \leqslant C_v(k+D). \qquad (3.16)$$

En posant $C_0 = \sum_{v\in S} C_v$, somme finie de termes strictement positifs, on a donc

$$\sum_{v\in S} h_v(\varphi_D^k) \leqslant C_0(k+D). \qquad (3.17)$$

D'après les majorations de hauteurs (3.15) et (3.17),

$$\begin{aligned}
h(\varphi_D^k) &= \sum_{v\in S} h_v(\varphi_D^k) + \sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_K\setminus S} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \\
&\leqslant C_0(k+D) + C''(k+D) - \overline{\alpha} \sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_K\setminus S} \log |k!|_{\mathfrak{p}} \\
&\leqslant C_1(k+D) - \overline{\alpha} \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_K} \log |k!|_{\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

D'après la formule du produit,

$$- \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_K} \log |k!|_{\mathfrak{p}} = [K:\mathbf{Q}] \log(k!) \leqslant [K:\mathbf{Q}] k \log k,$$

d'où

$$h(\varphi_D^k) = \sum_{v\in\Sigma_K} h_v(\varphi_D^k) \leqslant C_1(k+D) + \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}] k \log k.$$

Soit S' un ensemble fini de places de K. Comme pour tout $v \in S'$, la hauteur du morphisme d'évaluation φ_D^k à la place v vérifie la majoration simple (3.16), on a aussi, par la même méthode,

$$\sum_{v\in\Sigma_K\setminus S'} h_v(\varphi_D^k) \leqslant C_2(k+D) + \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}] k \log k,$$

et ce pour tout nombre réel $\overline{\alpha} > \alpha$. Par conséquent, le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est α-arithmétique. $\square$

3.5. Densité de $\mathfrak{p}$-courbures nulles

Soit X une variété projective sur un corps de nombres K, soit P un point K-rationnel lisse de X. Soit F un feuilletage algébrique sur un ouvert de X contenant P et soit $\widehat{V}$ le germe de feuille formelle défini par F au voisinage de P.

Dans ce paragraphe, nous définissons une « densité » β dans l'intervalle $[0,1]$ de $\mathfrak{p}$-courbures nulles du feuilletage F, valant 1 sans hypothèse supplémentaire sur le feuilletage et 0 si presque toutes les $\mathfrak{p}$-courbures sont nulles. Cette « densité » est reliée à la notion de sous-schéma formel α-arithmétique : une feuille formelle d'un feuilletage avec une « densité » β de $\mathfrak{p}$-courbures nulles est $(1-\beta)$-arithmétique (proposition 3.17). Avec cette définition, le théorème 4.6 fournit, dans le cas archimédien, une sorte « d'interpolation » entre le théorème de Schneider-Lang classique (cas où la densité de $\mathfrak{p}$-courbures nulles est nulle), et un théorème d'algébricité de Bost (cas où presque toutes les $\mathfrak{p}$-courbures sont nulles) dans son article [Bost, 2001].

Lemme 3.14. — *Supposons que $\widehat{V}$ soit le germe d'une feuille formelle d'un feuilletage algébrique en un point rationnel. Alors le morphisme d'évaluation vérifie les majorations suivantes : il existe un ensemble fini S d'idéaux maximaux de $\mathfrak{o}_K$ tel que, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec_m} \mathfrak{o}_K \setminus S$, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $D \in \mathbf{N}^*$,*

$$h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \leqslant k\frac{[K_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Q}_p]\log p}{p-1}, \tag{3.18}$$

et si de plus $k < p$, on a :

$$h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \leqslant 0. \tag{3.19}$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}_K$, $\mathfrak{p} \notin S$ tel que la $\mathfrak{p}$-courbure de F est nulle. Alors

$$h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \leqslant k\frac{[K_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Q}_p]\log p}{p(p-1)}. \tag{3.20}$$

Démonstration. — Les inégalités (3.18) et (3.19) se déduisent de l'inégalité (3.1). Si de plus la $\mathfrak{p}$-courbure est nulle, d'après l'inégalité (3.3) on a (3.20). □

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, posons

$$\psi_K(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K \\ \text{tq } p\leqslant x}} [K_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Q}_p]\frac{\log p}{p-1}.$$

Définition 3.15. — *Soit F un feuilletage algébrique sur X. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, posons*

$$\beta_x = \frac{1}{\psi_K(x)} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \text{ tq } p \leqslant x, \\ \mathfrak{p}\text{-courbure}(F)=0}} \frac{[K_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p] \log p}{p-1}.$$

On appellera « densité (inférieure) » de $\mathfrak{p}$-courbures nulles le nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$\beta = \varliminf_{x \to \infty} \beta_x. \tag{3.21}$$

Lemme 3.16. — *Soit K un corps de nombres. Alors, quand k tend vers $+\infty$,*

$$\psi_K(k) \sim [K : \mathbf{Q}] \log k.$$

Démonstration. — Pour tout nombre entier naturel k,

$$\begin{aligned} k\psi_K(k) &= \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec_m}\, \mathfrak{o}_K \\ \text{tq } p \leqslant k}} [K_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p] k \frac{\log p}{p-1} \\ &= \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec_m}\, \mathfrak{o}_K \\ \text{tq } p \leqslant k}} v_p(k!) [K_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p] \log p + \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec_m}\, \mathfrak{o}_K \\ \text{tq } p \leqslant k}} [K_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p] \frac{S_p(k)}{p-1} \log p, \end{aligned}$$

où $S_p(k)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de k en base p. La première somme vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec_m}\, \mathfrak{o}_K \\ \text{tq } p \leqslant k}} v_p(k!) [K_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p] \log p &= \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec_m}\, \mathfrak{o}_K} v_p(k!) [K_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p] \log p \\ &= \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec_m}\, \mathfrak{o}_K} \log \left(|k!|_\mathfrak{p}^{-1} \right) \\ &= [K : \mathbf{Q}] \log(k!) \\ &\sim [K : \mathbf{Q}] k \log k. \end{aligned}$$

Montrons que la deuxième somme est négligeable devant la première, quand k tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\\ \text{tq } p\leqslant k}} [K_\mathfrak{p}:\mathbf{Q}_p]\frac{S_p(k)}{p-1}\log p &\leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\\ \text{tq } p\leqslant k}} [K_\mathfrak{p}:\mathbf{Q}_p]\frac{(p-1)(\log_p(k)+1)}{p-1}\log p\\
&\leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\\ \text{tq } p\leqslant k}} [K_\mathfrak{p}:\mathbf{Q}_p]\left(\frac{\log k}{\log p}+1\right)\log p\\
&\leqslant 2\log k \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\\ \text{tq } p\leqslant k}} [K_\mathfrak{p}:\mathbf{Q}_p]\\
&\leqslant 2[K:\mathbf{Q}]\log k \sum_{p \text{ premier},\ p\leqslant k} 1\\
&\leqslant C\log k\frac{k}{\log k},
\end{aligned}$$

où C est un nombre réel strictement positif, d'après le théorème de Tchebychev. Donc

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\\ \text{tq } p\leqslant k}} [K_\mathfrak{p}:\mathbf{Q}_p]\frac{S_p(k)}{p-1}\log p = O(k).$$

Finalement, $\psi_K(k) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec_m}\mathfrak{o}_K\\ \text{tq } p\leqslant k}} [K_\mathfrak{p}:\mathbf{Q}_p]\frac{\log p}{p-1} \sim [K:\mathbf{Q}]\log k.$ □

Proposition 3.17. — *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K et soit P un point K-rationnel lisse de X. Soit F un feuilletage algébrique sur un ouvert de X contenant P et soit $\widehat{V}$ le germe de feuille formelle défini par F au voisinage de P.*

Soit β la « densité » des $\mathfrak{p}$-courbures nulles de F. Alors $\widehat{V}$ est $(1-\beta)$-arithmétique.

Démonstration. — Soit S un ensemble fini de places de K. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel positif C tel que, pour tous k, D,

$$\sum_{v\in\Sigma_K\setminus S} h_v(\varphi_D^k) \leqslant C(k+D) + (1-\beta+\varepsilon)k\log k.$$

Comme le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est le germe d'un feuilletage algébrique, il est 1-arithmétique et donc, pour toute place v de K, il existe un nombre réel positif C_v tel que, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $D \in \mathbf{N}^*$,

$$h_v(\varphi_D^k) \leqslant C_v(k+D).$$

Soit A l'ensemble des idéaux maximaux $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K$ tels que la $\mathfrak{p}$-courbure de F est nulle. Alors en posant $C_1 = \sum_{v:K\hookrightarrow\mathbf{C}} C_v$,

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\Sigma_K\setminus S} h_v(\varphi_D^k) &\leqslant C_1(k+D) + \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_k} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \\
&\leqslant C_1(k+D) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_k \\ p\leqslant k}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \qquad \text{d'après (3.19)} \\
&\leqslant C_1(k+D) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in A \\ p\leqslant k}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_k\setminus A \\ p\leqslant k}} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) \\
&\leqslant C_2(k+D) + k\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in A \\ p\leqslant k}} \frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\log p}{p(p-1)} \\
&\qquad + k \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_k\setminus A \\ p\leqslant k}} \frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\log p}{p-1} \\
&\leqslant C_3(k+D) + k \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_k\setminus A \\ p\leqslant k}} \frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\log p}{p-1},
\end{aligned}$$

car $\sum_{\mathfrak{p}\in A} \frac{\log p}{p(p-1)}[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p] < \infty$. D'après la définition 3.15,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_k\setminus A \\ p\leqslant k}} \frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\log p}{p-1} = (1-\beta_k)\psi_K(k).$$

Comme $\beta = \varliminf_k \beta_k$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $\beta_k \geqslant \beta - \varepsilon$. De plus, d'après le lemme 3.16, $\psi_K(x) \sim [K:\mathbf{Q}]\log k$, donc il existe un nombre réel positif C_4 tel que, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec_m}\,\mathfrak{o}_k\setminus A \\ p\leqslant k}} \frac{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]\log p}{p-1} \leqslant C_4 + (1-\beta+\varepsilon)[K:\mathbf{Q}]k\log k.$$

Le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est donc $(1-\beta)$-arithmétique. □

3.6. Sous-schémas formels basés en un point fermé

Jusqu'à présent, nous avons considéré des sous-schémas formels du complété formel d'une variété projective en un point rationnel. Dans ce paragraphe, nous allons définir l'*α-analyticité* d'un sous-schéma formel lisse du complété formel en un point fermé quelconque, ainsi que les morphismes d'évaluation qui lui sont associés, puis nous définirons ce que signifie être α-*arithmétique* pour un tel schéma formel.

Soit X une variété projective de dimension n sur un corps de nombres K et soit P un point fermé lisse de X. Soit $K(P)$ le corps résiduel de P. Alors le complété formel $\widehat{X}_P$ de X en P est isomorphe au spectre formel de l'anneau $K(P)[[t_1,\dots,t_n]]$. Soit K' une extension galoisienne de K contenant le corps résiduel $K(P)$. Quand on étend les scalaires de K à K', $\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}} K(P)[[t_1,\dots,t_n]]$ se décompose en une union disjointe de schémas formels $\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}} K'[[t_1,\dots,t_n]]$ indexée par l'ensembles des plongements de $K(P)$ dans K' :

$$\widehat{X}_P \simeq \bigsqcup_{\sigma:K(P)\hookrightarrow K'} \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}} K'[[t_1,\dots,t_n]].$$

Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de dimension d de $\widehat{X}_P$. Soit $I_{\widehat{V}}$ l'idéal de $K(P)[[t_1,\dots,t_n]]$ définissant $\widehat{V}$. Lorsque l'on étend les scalaires de K à K', le sous-schéma formel $\widehat{V}$ se décompose en une union disjointe de sous-schémas formels sur K', indexée par les plongements de $K(P)$ dans K' :

$$\widehat{V}\otimes_K K' = \bigsqcup_{\sigma:K(P)\hookrightarrow K'} \widehat{V}_\sigma, \tag{3.22}$$

où $\widehat{V}_\sigma$ est défini par l'idéal $I_{\widehat{V}} \otimes_{K(P),\sigma} K' \subset K'[[t_1,\dots,t_n]]$.

Lemme 3.18. — *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K et soit P un point fermé de X. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit K' une extension galoisienne de K contenant le corps résiduel $K(P)$ de P. Soit α un nombre réel positif. S'il existe un plongement $\tilde\sigma$ de $K(P)$ dans K' tel que $\widehat{V}_{\tilde\sigma}$ est α-analytique, alors pour tout plongement $\sigma : K(P)\hookrightarrow K'$, $\widehat{V}_\sigma$ est α-analytique.*

Démonstration. — Notons n la dimension de X et d celle de $\widehat{V}$. Soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Comme $\widehat{V}_{\tilde\sigma}$ est α-analytique, il admet un paramétrage par des séries formelles $f_1,\dots,f_n \in K[[x_1,\dots,x_d]]$, $f_i = \sum_I a_I(i)x^I$, qui, en toute place de K', ont un rayon de convergence non nul et vérifient : il existe un ensemble fini S de places de K' contenant toutes les places archimédiennes telles que, pour tout $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{o}_{K'})\setminus S$, il existe $C_\mathfrak{p} > 0$ tel que, pour tout $I\in \mathbf{N}^d$, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$,

$$\|a_I(i)\|_\mathfrak{p} \leqslant \frac{C_\mathfrak{p}}{\|I!\|_\mathfrak{p}^{\overline{\alpha}}},$$

$$\prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{o}_{K'}} C_\mathfrak{p} < \infty.$$

Soit σ un plongement de $K(P)$ dans K'. Il existe $\gamma \in \mathrm{Gal}(K'/K(P))$ tel que $\sigma = \gamma\tilde{\sigma}$. Le sous-schéma formel $\widehat{V}_{\gamma\tilde{\sigma}}$ est paramétré par $\gamma \circ f_1, \dots, \gamma \circ f_n$ dont les coefficients sont les $\gamma(a_I(1)), \dots, \gamma(a_I(n))$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}_{K'}$. Alors

$$\begin{aligned}\|\gamma(a_I(i))\|_{\mathfrak{p}} &= \|\gamma(a_I(i))\|_{\gamma(\gamma^{-1}(\mathfrak{p}))}\\ &= \|a_I(i)\|_{\gamma^{-1}(\mathfrak{p})}\\ &\leqslant \frac{C_{\gamma^{-1}(\mathfrak{p})}}{\|I!\|_{\gamma^{-1}(\mathfrak{p})}^{\overline{\alpha}}}.\end{aligned}$$

Comme $\gamma_{|\mathbf{Q}}$ est l'identité, $\gamma^{-1}(\mathfrak{p}) \cap \mathbf{Z} = \mathfrak{p} \cap \mathbf{Z}$, donc les nombres entiers ont mêmes valuations $\mathfrak{p}$-adique et $\gamma^{-1}(\mathfrak{p})$-adique. Ainsi on a

$$\|\gamma(a_I(i))\|_{\mathfrak{p}} \leqslant \frac{C_{\gamma^{-1}(\mathfrak{p})}}{\|I!\|_{\mathfrak{p}}^{\overline{\alpha}}}.$$

De plus,

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, \mathfrak{o}_{K'}} C_{\gamma^{-1}(\mathfrak{p})} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, \mathfrak{o}_{K'}} C_{\mathfrak{p}} < \infty.$$

Le sous-schéma formel $\widehat{V}_{\sigma} = \widehat{V}_{\gamma\tilde{\sigma}}$ est donc α-analytique. □

Définition 3.19. — *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K et soit P un point fermé de X. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit K' une extension galoisienne de K contenant le corps résiduel $K(P)$. Soit α un nombre réel positif. On dit que $\widehat{V}$ est* α-analytique *sur K' si pour tout plongement $\sigma : K(P) \hookrightarrow K'$, $\widehat{V}_{\sigma}$ est α-analytique.*

Lemme 3.20. — *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K et soit P un point fermé de X. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel de $\widehat{X}_P$. Soit K' une extension galoisienne de K contenant le corps résiduel $K(P)$ et soit α un nombre réel positif.*

Si $\widehat{V}$ est α-analytique sur K', alors $\widehat{V}$ est α-analytique sur K'' pour toute extension finie K'' de K'.

Démonstration. — Soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Soit σ un plongement de K' dans $K(P)$ et soient $a_I(i) \in K'$ les coefficients d'un paramétrage de $\widehat{V}_{\sigma}$. Si $\widehat{V}$ est α-analytique sur K', il existe un ensemble fini de places de K' tel que, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{o}_{K'}) \setminus S$,

$$\|a_I(i)\|_{\mathfrak{p}} \leqslant \frac{C_{\mathfrak{p}}}{\|I!\|_{\mathfrak{p}}^{\overline{\alpha}}}.$$

et

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, \mathfrak{o}_{K'}} C_{\gamma^{-1}(\mathfrak{p})} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, \mathfrak{o}_{K'}} C_{\mathfrak{p}} < \infty.$$

Soit γ un plongement de K' dans K''. Alors $\gamma(a_I(i))$ sont les coefficients d'un paramétrage de $\widehat{V}_{\gamma\circ\sigma}$. Soit S' l'ensemble des idéaux maximaux $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{o}_{K''}$ tels que $\mathfrak{p} = \gamma^{-1}(\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{o}_{K'}$ n'est pas dans S et n'est pas ramifié dans $\mathfrak{o}_{K''}$. Alors S' est un ensemble fini de places finies de $\mathfrak{o}_{K''}$ et pour tout $\mathfrak{q} \in S'$,

$$\begin{aligned}\|\gamma(a_I(i))\|_{\mathfrak{q}} &= \|\gamma^{-1}\gamma(a_I(i))\|_{\gamma^{-1}\mathfrak{q}}\\ &\leqslant \frac{C_{\mathfrak{p}}}{\|I!\|_{\mathfrak{q}}^{\alpha}}.\end{aligned}$$

□

Définition 3.21. — *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K et soit P un point fermé de X. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit α un nombre réel positif. On dit que $\widehat{V}$ est* α-analytique *s'il existe une extension K' de K, galoisienne, contenant le corps résiduel $K(P)$ de P telle que $\widehat{V}$ soit α-analytique sur K'.*

Définissons également la notion d'α-arithméticité pour un tel sous-schéma formel basé en un point fermé. Soit σ un plongement de $K(P)$ dans K'. Rappelons la définition des morphismes d'évaluation le long du sous-schéma formel $\widehat{V}_\sigma$. Pour tout nombre entier naturel k, notons $(V_\sigma)_k$ le k-ième voisinage infinitésimal de P^σ dans $\widehat{V}_\sigma$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\{P^\sigma\} &= (V_\sigma)_0,\\ (V_\sigma)_k &\subset (V_\sigma)_{k+1},\\ \widehat{V}_\sigma &= \varinjlim_k (V_\sigma)_k.\end{aligned}$$

Soit L un fibré en droites ample sur X. Définissons les K'-espaces vectoriels et applications K'-linéaires suivants, pour tous entiers naturel D, k :

$$E_{D,\sigma} = \Gamma(X_{K'}, L^{\otimes D}),$$

$$\begin{aligned}\eta_{D,\sigma} : E_{D,\sigma} &\to \Gamma(\widehat{V}_\sigma, L^D)\\ s &\mapsto s_{|\widehat{V}_\sigma},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta^k_{D,\sigma} : E_{D,\sigma} &\to \Gamma((V_\sigma)_k, L^D)\\ s &\mapsto s_{|(V_\sigma)_k}.\end{aligned}$$

Les espaces vectoriels

$$E^k_{D,\sigma} = \ker \eta^{k-1}_{D,\sigma} = \{s \in \Gamma(X_{K'}, L^{\otimes D}) \mid s_{|(V_\sigma)_{k-1}} = 0\},$$

où k décrit l'ensemble des nombres entiers naturels, définissent une filtration décroissante de l'espace vectoriel $E_{D,\sigma}$.

Le noyau de l'application de restriction de $\Gamma((V_\sigma)_k, L^D)$ à $\Gamma((V_\sigma)_{k-1}, L^D)$ est isomorphe à $\mathrm{Sym}^k\left(\Omega^1_{\hat{V}_\sigma}\right)\otimes L^D_{P^\sigma}$. L'application $\eta^k_{D,\sigma}$ restreinte à $E^k_{D,\sigma}$ induit donc une application K'-linéaire

$$\varphi^k_{D,\sigma} : E^k_{D,\sigma} \longrightarrow \mathrm{Sym}^k\left(\Omega^1_{\hat{V}_\sigma}\right) \otimes L^D_{P^\sigma}. \tag{3.23}$$

Lemme 3.22. — *Soient k, D des nombres entiers naturels. Pour toute place v de K', pour tous plongements σ_1, σ_2 de $K(P)$ dans K', on a*

$$h_v(\varphi^k_{D,\sigma_2}) = h_{\sigma_1\sigma_2^{-1}v}(\varphi^k_{D,\sigma_1}).$$

Démonstration. — Posons $\gamma = \sigma_2\sigma_1^{-1} \in \mathrm{Gal}(K'/K(P))$. Le sous-schéma formel $\widehat{V}_{\sigma_2} = \widehat{V}_{\gamma\sigma_1}$ est défini par l'idéal $I_{\widehat{V}_{\gamma\sigma_1}} = \gamma\left(I_{\widehat{V}_{\sigma_1}}\right)$. Alors

$$\varphi^k_{D,\sigma_2} = \gamma \circ \varphi^k_{D,\sigma_1} \circ \gamma^{-1}. \tag{3.24}$$

Soit $s \in E^k_{D,\sigma_2}$, soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}_K$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\varphi^k_{D,\sigma_2}(s)\|_{\mathfrak{p}} &= \|\gamma \circ \varphi^k_{D,\sigma_1}(\gamma^{-1}(s))\|_{\mathfrak{p}} \\
&= \|\gamma \circ \varphi^k_{D,\sigma_1}(\gamma^{-1}(s))\|_{\gamma(\gamma^{-1}\mathfrak{p})} \\
&= \|\varphi^k_{D,\sigma_1}(\gamma^{-1}(s))\|_{\gamma^{-1}\mathfrak{p}} \\
&\leqslant \|\varphi^k_{D,\sigma_1}\|_{\gamma^{-1}\mathfrak{p}} \ \|\gamma^{-1}(s)\|_{\gamma^{-1}\mathfrak{p}} \\
&\leqslant \|\varphi^k_{D,\sigma_1}\|_{\gamma^{-1}\mathfrak{p}} \ \|s\|_{\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré l'inégalité suivante

$$\|\varphi^k_{D,\sigma_2}\|_{\mathfrak{p}} \leqslant \|\varphi^k_{D,\sigma_1}\|_{\gamma^{-1}\mathfrak{p}}.$$

En appliquant l'inégalité précédente à $\sigma_1 = \gamma^{-1}\sigma_2$ à la place $\gamma^{-1}v$ au lieu de la place v, on obtient l'inégalité

$$\|\varphi^k_{D,\sigma_1}\|_{\gamma^{-1}v} \leqslant \|\varphi^k_{D,\sigma_2}\|_{\gamma(\gamma^{-1}v)} \leqslant \|\varphi^k_{D,\sigma_2}\|_{v}.$$

□

Soit α un nombre réel positif. D'après ce lemme, si l'un des sous-schémas formels $\widehat{V}_\sigma$ est α-arithmétique, alors ils le sont tous. En effet, soit σ un plongement de $K(P)$ dans K'. Supposons que $\widehat{V}_\sigma$ est α-arithmétique et soit $\overline{\alpha}$ un nombre réel strictement supérieur à α. Par définition, pour tout ensemble fini S de places de K', il existe un nombre réel C_S strictement positif tel que

$$\frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in \Sigma_{K'} \setminus S} \log \left\|\varphi^k_{D,\sigma}\right\|_v \leqslant \overline{\alpha} k \log k C_S(k+D).$$

Soit $\gamma \in \mathrm{Gal}(K'/K(P))$, soit S en ensemble de places de K' et soient k, D des nombres entiers naturels. Alors, d'après le lemme 3.22,

$$\begin{aligned}\frac{1}{[K':\mathbf{Q}]}\sum_{v\in\Sigma_{K'}\setminus S} h_v(\varphi^k_{D,\gamma\sigma}) &= \frac{1}{[K':\mathbf{Q}]}\sum_{v\in\Sigma_{K'}\setminus S} h_{\gamma^{-1}v}(\varphi^k_{D,\sigma})\\ &= \frac{1}{[K':\mathbf{Q}]}\sum_{v\in\Sigma_{K'}\setminus \gamma^{-1}S} h_v(\varphi^k_{D,\sigma})\\ &\leqslant \overline{\alpha}k\log k + C_{\gamma^{-1}S}(k+D),\end{aligned}$$

car $\widehat{V}_\sigma$ est α-arithmétique. Ainsi, $\widehat{V}_{\gamma\sigma}$ est également α-arithmétique.

On peut donc donner une définition d'α-arithméticité pour $\widehat{V}$ comme on l'a fait pour l'α-analyticité.

Définition 3.23. — *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K et soit P un point fermé de X. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit K' une extension galoisienne de K contenant le corps résiduel $K(P)$ de P. Soit α un nombre réel positif. On dit que $\widehat{V}$ est* α-arithmétique *si pour tout plongement $\sigma : K(P) \hookrightarrow K'$, $\widehat{V}_\sigma$ est α-arithmétique.*

Remarque. — Cette définition ne dépend pas du choix d'une extension galoisienne K' de K contenant $K(P)$ d'après le lemme 3.11.

Proposition 3.24. — *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K et soit P un point fermé de X. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse de $\widehat{X}_P$. Soit α un nombre réel positif. Si le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est α-analytique, alors il est α-arithmétique.*

Démonstration. — Si $\widehat{V}$ est α-arithmétique, il existe une extension galoisienne K' de K contenant $K(P)$ telle que pour tout $\sigma : K(P) \hookrightarrow K'$, $\widehat{V}_\sigma$ est α-analytique. D'après la proposition 3.13, les $\widehat{V}_\sigma$ sont donc aussi α-arithmétiques, et $\widehat{V}$ est donc par définition α-arithmétique. □

CHAPITRE 4

THÉORÈME DE SCHNEIDER-LANG SUR UNE COURBE

Le théorème principal de ce chapitre est une généralisation du théorème de Schneider-Lang sur une courbe affine sur le corps des nombres complexes ou sur $\mathbf{C}_p$. Le contexte en est le suivant. Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K, soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de points rationnels de X et pour $j \in J$ soit $\widehat{V}_j$ un sous-schéma formel lisse du complété formel de X en x_j. Sous certaines hypothèses portant sur les sous-schémas formels $\widehat{V}_j$, on démontre que la famille (x_j) est finie.

Avant de donner l'énoncé du théorème 4.6, nous définissons une notion d'*uniformisation* de sous-schémas formels définis en des points rationnels de X par une fonction holomorphe sur une courbe affine M_0 sur $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$. Cette notion généralise celle de paramétrage par des fonctions méromorphes sur la droite affine sur $\mathbf{C}$. Si M est la compactification projective de M_0, nous définissons également l'*ordre de croissance* d'une telle fonction holomorphe sur M_0 en chacun des points de $M \setminus M_0$. Cette notion est une généralisation de celle d'ordre exponentiel d'une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$.

La démonstration du théorème repose sur la méthode des pentes, notamment l'inégalité de pentes exposée au chapitre 1. On définit un *morphisme d'évaluation* le long des sous-schémas formels considérés. L'hypothèse d'uniformisation permet de donner une majoration de la hauteur de ce *morphisme d'évaluation* en l'une des places de K, grâce à un *lemme de Schwarz.*

4.1. Ordre de croissance

Soit F un corps valué complet et algébriquement clos. Les cas qui nous intéresseront dans la suite sont les cas $F = \mathbf{C}$ et $F = \mathbf{C}_p$. Soient X une variété projective sur F, M une courbe algébrique sur F, et P un point de M. Soit $\overline{L}$ un fibré en droites métrisé sur X ; supposons L ample.

Soit T un sous-ensemble fini de M. La courbe affine $M \setminus T$ étant un espace de Stein (voir [Grauert et Remmert, 2004; Kiehl, 1967]), il existe toujours une section globale non nulle de $\Gamma(M \setminus T, \Theta^*(L^{-1}))$.

Définition 4.1. — *Soit T une partie finie non vide de $M(F)$. Soit $\rho = (\rho_\tau)_{\tau\in T}$ une famille de nombre réels positifs. Une application holomorphe $\Theta : M \setminus T \to X(F)$ est* d'ordre inférieur à ρ *en T s'il existe une section globale non nulle $\eta \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^*(L^{-1}))$ telle que, pour tout $\tau \in T$, si u_τ est un paramètre local de M au voisinage de τ, il existe des nombres réels A_1, A_2 strictement positifs tels que*

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} \quad \textit{pour tout } z \textit{ suffisamment proche de } \tau. \tag{4.1}$$

Dans le cas où $F = \mathbf{C}$, l'application est holomorphe au sens de la géométrie analytique complexe. Dans le cas $F = \mathbf{C}_p$, elle est holomorphe au sens de la géométrie analytique rigide (voir [Bosch *et al.*, 1984] ainsi que [Fresnel et van der Put, 1981]).

Remarque. — Cette définition ne dépend pas du choix d'un paramètre local au voisinage d'un point de T. En effet, soit $\tau \in T$, supposons que pour tout z suffisamment proche de τ l'on ait

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}}.$$

Soit u'_τ un autre paramètre local de M au voisinage de τ. Il existe alors un nombre réel $A_3 > 0$ tel que $|u_\tau(z)| \geqslant A_3 |u'_\tau(z)|$ au voisinage de τ. Alors

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} \leqslant A_1 e^{A_2 A_3^{-\rho} |u'_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} \leqslant A_1 e^{A'_2 |u'_\tau(z)|^{-\rho_\tau}},$$

où l'on a posé $A'_2 = A_2 A_3^{-\rho}$.

Lemme 4.2. — *On utilise les mêmes notations que dans la définition 4.1. Soient $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ deux fibrés en droites amples métrisés sur X et soit η une section globale de $\Theta^* L_1^{-1}$ vérifiant l'inégalité* (4.1) *de la définition précédente. Alors il existe une section $\eta' \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^*(L_2^{-1}))$ non nulle vérifiant également* (4.1).

Démonstration. — Soit N un nombre entier naturel non nul tel que le fibré en droites $L_1^N \otimes L_2^{-1}$ admette une section globale non nulle f. C'est possible car L_1 est ample. Alors, en posant $\eta' = \eta^N \Theta^* f \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^* L_2^{-1})$, on a, pour tout $\tau \in T$ et tout z suffisamment proche de τ,

$$\begin{aligned} \|\eta'(z)\| &= \|\eta^N(z)\| \|\Theta^* f(z)\| \\ &\leqslant A_1^N e^{A'_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} \|\Theta^* f(z)\|, \end{aligned}$$

où $A_2' = A_2 N$. La section f a une norme bornée sur X, donc $\Theta^* f$ a une norme bornée sur $M \setminus T$ et il existe $A_1' > 0$ tel que

$$\|\eta'(z)\| \leqslant A_1' e^{A_2' |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}}.$$

$\square$

Lemme 4.3. — *Soit $\Theta : M \setminus T \to X(F)$ d'ordre inférieur à ρ_τ en $\tau \in T$ et soient $P_1, \ldots, P_m \in M \setminus T$. On peut choisir une section η vérifiant* (4.1) *qui ne s'annule pas en les points P_i.*

Démonstration. — Nous allons construire une fonction g méromorphe sur M, holomorphe sur $M \setminus (T \cup \{P_1, \ldots, P_m\})$, ayant des pôles d'ordre exactement n_i en P_i et d'ordre contrôlé en les points de T. La section $\tilde{\eta} = g\eta$ ne s'annule alors pas en $P_1, \ldots, P_m$ et est holomorphe sur $M \setminus T$; il restera à remarquer qu'elle vérifie encore la majoration (4.1).

Si D est un diviseur sur M, notons $h^0(D)$ la dimension sur F de l'espace des sections $H^0(M, \mathscr{O}_M(D))$. Notons K_M un diviseur canonique de M.

Soit $\eta \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^* L^{-1})$ vérifiant (4.1). Notons n_i l'ordre d'annulation de η en P_i. Soit $n \in \mathbf{N}$ et notons Δ le diviseur $\Delta = \sum_{\tau \in T} n[\tau] + \sum n_i [P_i]$. D'après le théorème de Riemann-Roch,

$$h^0(\Delta) - h^0(K_M - \Delta) = \deg \Delta + 1 - g,$$

et

$$h^0(\Delta - [P_i]) - h^0(K_M - \Delta + [P_i]) = \deg \Delta - g,$$

où g désigne le genre de M. Si $\deg \Delta \geqslant 2g$,

$$h^0(K_M - \Delta) = h^0(K_M - \Delta + [P_i]) = 0,$$

et par conséquent $H^0(M, \mathscr{O}(\Delta - [P_i]))$ est un hyperplan de $H^0(M, \mathscr{O}(\Delta))$. Comme le corps F est infini, il existe une fonction $g \in H^0(M, \mathscr{O}(\Delta))$ qui n'appartient à aucun de ces hyperplans

$$H^0(M, \mathscr{O}(\Delta - [P_1])), \ldots, H^0(M, \mathscr{O}(\Delta - [P_m])).$$

La fonction g est méromorphe sur M, holomorphe sur $M \setminus (T \cup \{P_1, \ldots, P_m\})$, a des pôles d'ordre exactement n_i en P_i et d'ordre au plus n en tout $\tau \in T$.

La section $\tilde{\eta} = g\eta$ ne s'annule pas en $P_1, \ldots, P_m$ et est holomorphe sur $M \setminus T$. Soit $\tau \in T$ et soit u_τ un paramètre local de M au voisinage de τ. Comme g a un pôle d'ordre au plus n en τ, il existe $A_3 > 0$ et il existe un voisinage U de τ dans M tels que pour tout $z \in U$, $g(z) \leqslant A_3 |u_\tau(z)|^{-n}$. Alors pour tout z suffisamment proche de τ,

$$\|\tilde{\eta}(z)\| \leqslant A_1 A_3 e^{A_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} |u_\tau(z)|^{-n}.$$

Soit $A_2' > A_2$. Alors, quand x tend vers ∞ (x réel), $e^{A_2 x^{\rho_\tau}} x^n = o(e^{A_2' x^{\rho_\tau}})$ et donc il existe $A_4 > 0$ tel que

$$\|\tilde{\eta}(z)\| \leqslant A_4 e^{A_2' |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}}.$$

La section $\tilde{\eta}$ vérifie donc, comme η, une inégalité semblable à (4.1) et ne s'annule pas en $P_1, \ldots, P_m$. □

Nous allons démontrer que la définition d'*ordre de croissance* donnée dans ce chapitre est équivalente à celle d'ordre de croissance exponentiel classique dans le cas où les sous-schémas formels sont paramétrés par n fonctions holomorphes. Ainsi, le théorème 4.6 est bien une généralisation du théorème de Schneider-Lang classique (théorème A, page 7).

Soit $K \subset \mathbf{C}$ un corps de nombres. Soit M une courbe algébrique sur $\mathbf{C}$, projective lisse et connexe et soit T un ensemble fini de points de $M(\mathbf{C})$.

Définition 4.4. — *Soit $\tau \in T$ et soit ρ_τ un nombre réel positif. On dit qu'une fonction f holomorphe sur $M(\mathbf{C})\backslash T$ est* d'ordre exponentiel inférieur à ρ_τ en τ *si pour tout paramètre local u_τ au voisinage de τ il existe des nombres réels strictement positifs A et B tels que, pour tout z suffisamment proche de τ,*

$$|f(z)| \leqslant A \exp(B|u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}). \tag{4.2}$$

Une fonction méromorphe sur $M\backslash T$ est d'ordre exponentiel inférieur à ρ *si elle peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions holomorphes d'ordre inférieur à ρ.*

Dans le cas où $M = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et T est égal au singleton $\{\infty\}$, donc $M(\mathbf{C})\backslash T \simeq \mathbf{C}$, c'est la définition habituelle d'ordre de croissance (voir page 8).

Pour tout $\tau \in T$, soit ρ_τ un nombre réel positif et soit $\rho = \sum_{\tau \in T} \rho_\tau$. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions méromorphes sur $M(\mathbf{C}) \setminus T$ telles que, pour tout $\tau \in T$, $f_1, \ldots, f_n$ sont d'ordre inférieur à ρ_τ en τ. Soit θ_0 une fonction holomorphe sur $M \setminus T$ d'ordre inférieur à ρ_τ en chaque $\tau \in T$, ne s'annulant pas en $w_1, \ldots, w_m$ et telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, la fonction $\theta_i = f_i f_0$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ d'ordre inférieur à ρ_τ en chaque $\tau \in T$. Soit T' le lieu des zéros communs des fonctions $\theta_0, \ldots, \theta_n$. Alors la fonction

$$\Theta = (1, f_1, \ldots, f_n) = (\theta_0, \ldots, \theta_n)$$

est une application holomorphe de $M \setminus (T \cup T')$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Elle se prolonge en une application holomorphe $\tilde{\Theta}$ définie sur $M \setminus T$ tout entier. Fixons des coordonnées projectives $(X_0, \ldots, X_n)$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Le fibré $\mathscr{O}(1)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est muni de la métrique définie comme suit. Soit σ une section de $\mathscr{O}(1)$, $\sigma = \sum_{j=1}^n a_j X_j$, alors

$$\|\sigma(z)\| = \frac{|\sum_{j=1}^n a_j X_j(z)|}{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |X_j(z)|}.$$

Définissons une section globale non nulle η de $\tilde{\Theta}^*\mathscr{O}(-1)$ de la manière suivante : sur $\{\tilde{\Theta}^{-1}(X_i) \neq 0\}$, soit

$$\eta_i = \frac{\tilde{\theta}_i}{\tilde{\Theta}^* X_i}.$$

Ces sections se recollent en une section $\eta \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^*\mathscr{O}(-1))$. Soit $z \in M \setminus T$ et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|X(\tilde{\theta}_i(z))|$ soit maximal, c'est-à-dire

$$\|X_i(\tilde{\Theta}(z))\| = \frac{|X_i(\tilde{\Theta}(z))|}{\max_j |X_j(\tilde{\Theta}(z))|} = 1.$$

On a alors

$$\|\eta(z)\| = \frac{|\tilde{\theta}_i(z)|}{\|\tilde{\Theta}^* X_i(z)\|} = \frac{|\tilde{\theta}_i(z)|}{\|X_i(\tilde{\Theta}(z))\|} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\tilde{\theta}_j(z)|.$$

Soit $\tau \in T$. Comme les fonctions $\tilde{\theta}_i$ sont d'ordre inférieur à ρ_τ en τ, il existe des nombres réels positifs A et B tels que

$$\|\tilde{\theta}_i(z)\| \leqslant A \exp(B |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}),$$

pour tout z assez proche de τ. La section non nulle η vérifie donc bien, pour tout $\tau \in T$ et tout z suffisamment proche de τ,

$$\|\eta(z)\| \leqslant A \exp\left(B(1/|z|)^{-\rho_\tau}\right).$$

Par conséquent, la fonction $\tilde{\Theta}$ est une application holomorphe de $M \setminus T$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ d'ordre inférieur à $(\rho_\tau)_{\tau \in T}$.

Réciproquement, soit $\Theta : M \setminus T \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ une application holomorphe d'ordre inférieur à ρ_τ en tout $\tau \in T$ et soit η une section de $\Theta^*\mathscr{O}(-1)$ vérifiant (4.1). Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction f_i définie par $f_i = \Theta^* X_i \eta$ est holomorphe sur $M \setminus T$ d'ordre de croissance inférieur à ρ_τ en τ, pour tout $\tau \in T$.

4.2. Énoncé

Soit X une variété projective sur un corps de nombres K. Soient $x_1, \cdots, x_m$ des points K-rationnels de X et, pour $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-schéma formel lise de dimension 1 du complété formel $\widehat{X}_{x_j}$ de X en x_j.

L'*adhérence de Zariski* de $\widehat{V} = \bigcup_{j=1}^m \widehat{V}_j$ dans X est par définition le plus petit fermé de Zariski Y de X (défini sur K) tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\widehat{V}_j \subset \widehat{Y}_{x_j}$. On dit que $\widehat{V}$ est *algébrique* si sa dimension (ici, 1) est égale à la dimension de son adhérence.

Soit v_0 une place de K, finie ou archimédienne, et soit $\mathbf{C}_{v_0}$ le complété d'une clôture algébrique du complété de K en v_0. Soit ρ un nombre réel positif.

Définition 4.5. — *La famille de sous-schémas formels* $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ *admet une* uniformisation d'ordre inférieur à ρ à la place v_0 *s'il existe une courbe algébrique* M *projective, connexe et lisse sur* $\mathbf{C}_{v_0}$*, un ensemble fini* $T \subset M$*, une famille* $(\rho_\tau)_{\tau \in T}$ *de nombres réels positifs vérifiant* $\sum_{\tau \in T} \rho_\tau \leqslant \rho$ *et une application holomorphe*

$$\Theta : M \setminus T \to X(\mathbf{C}_{v_0})$$

d'ordre inférieur à ρ_τ *en tout* $\tau \in T$*, tels qu'il existe des points distincts* $w_1, \ldots, w_m$ *de* $M \setminus T$ *tels que* $\Theta(w_j) = x_j$ *et le germe de courbe formelle paramétré par* Θ *au voisinage de* x_j *coïncide avec* $\widehat{V}_j$*, c'est-à-dire* $\widehat{V}_j = \Theta_* \left(\hat{\mathbf{A}}^1_{w_j}\right)$.

Nous pouvons maintenant énoncer la version géométrique du théorème de Schneider-Lang sur une courbe affine qui suit.

Théorème 4.6. — *Soit* X *une variété projective sur un corps de nombres* K*. Soient* $x_1, \cdots, x_m \in X(K)$ *(non nécessairement distincts) et pour* $1 \leqslant j \leqslant m$*, soit* $\widehat{V}_j$ *un sous-schéma formel lisse de dimension 1 du complété formel* $\widehat{X}_{x_j}$ *de* X *en* x_j *vérifiant les hypothèses suivantes :*

1. *Il existe un nombre réel* $\alpha \geqslant 0$ *tel que, pour tout* $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\widehat{V}_j$ *est* α*-arithmétique.*
2. *La famille de sous-schémas formels* $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ *admet une uniformisation d'ordre inférieur à* $\rho > 0$ *en une place* v_0*.*

Soit r *la dimension de l'adhérence de Zariski de* $\widehat{V} = \bigcup_{j=1}^m \widehat{V}_j$ *dans* X*.*

Alors,

– *ou bien* $r > 1$ *et*

$$m \leqslant \frac{r}{r-1} \alpha [K : \mathbf{Q}] \rho,$$

– *ou bien* $r = 1$*, c'est-à-dire les* $\widehat{V}_j$ *sont tous algébriques.*

Remarque. — Sous l'hypothèse d'uniformisation du théorème, si l'un des sous-schémas formels $\widehat{V}_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, est algébrique, alors ils le sont tous. En effet, s'il existe j tel que $\widehat{V}_j$ n'est pas Zariski-dense dans X, alors il existe une fonction rationnelle P sur X non nulle, identiquement nulle sur $\widehat{V}_j$. La fonction $\Theta^* P$ holomorphe sur $M \setminus T$ s'annule à un ordre infini en un point w_j tel que $\Theta(w_j) = x_j$. Comme $M \setminus T$ est connexe, $\Theta^* P$ est également nulle à un ordre infini en les w_i tels que $\Theta(w_i) = x_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Donc P est identiquement nulle le long de tous les $\widehat{V}_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, et aucun des sous-schémas formels $\widehat{V}_i$ n'est Zariski-dense dans X.

Quitte à remplacer X par l'adhérence de Zariski de $\widehat{V} = \cup_{i=1}^{m} \widehat{V}_i$, on peut supposer que les sous-schémas formels $\widehat{V}_i$ sont tous denses dans X et que $r = n$. C'est ce que l'on fera dans toute la suite.

4.3. Morphisme d'évaluation

Soit X une variété projective sur K de dimension n. Soient $P_1, \cdots, P_m \in X(K)$ et pour $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-schéma formel lisse (de dimension d) du complété formel $\widehat{X}_{P_j}$ de X en P_j. Pour tout nombre entier naturel k, notons $(V_j)_k$ le k-ième voisinage infinitésimal de P_j dans $\widehat{V}_j$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \{P_j\} &= (V_j)_0, \\ (V_j)_k &\subset (V_j)_{k+1}, \\ \widehat{V}_j &= \varinjlim_{k} (V_j)_k. \end{aligned}$$

Soit L un fibré en droites ample sur X. Définissons les K-espaces vectoriels et applications K-linéaires suivants, pour tout nombre entier naturel k et tout nombre entier naturel non nul D :

$$E_D = \Gamma(X, L^{\otimes D}),$$

$$\begin{aligned} \eta_D : E_D &\to \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma(\widehat{V}_j, L^D) \\ s &\mapsto (s_{|\widehat{V}_1}, \ldots, s_{|\widehat{V}_m}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_D^k : E_D &\to \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma((V_j)_k, L^D) \\ s &\mapsto (s_{|(V_1)_k}, \ldots, s_{|(V_m)_k}). \end{aligned}$$

Lemme 4.7. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout D, l'application η_D est injective,*
2. *pour tout D assez grand, l'application η_D est injective,*
3. *le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est dense dans X.*

Démonstration. — L'assertion 1 implique l'assertion 2.

Si $\widehat{V}$ n'est pas dense, alors $\widehat{V}$ est inclus dans une hypersurface H de X. Pour D assez grand, le fibré ample L a une section globale non nulle qui s'annule sur H et par conséquent η_D n'est pas injective et l'assertion 2 implique l'assertion 3.

Montrons que 3 implique 1. Supposons $\widehat{V}$ dense dans X et soit s une section de L^D sur X qui s'annule sur $\widehat{V}$. Alors $\widehat{V}$ est contenu dans le diviseur de s, qui est égal à X tout entier car le sous-schéma formel $\widehat{V}$ est dense dans X. Par conséquent, s est nulle sur X et η_D est injective. $\square$

Les espaces vectoriels

$$E_D^k = \ker \eta_D^{k-1} = \{s \in \Gamma(X, L^{\otimes D}) \mid s_{|(V_1)_{k-1}} = \cdots = s_{|(V_m)_{k-1}} = 0\}$$

définissent une filtration décroissante de l'espace vectoriel E_D. Cette filtration est séparée si η_D est injective.

Le noyau de l'application de restriction

$$\bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma((V_j)_k, L^D) \to \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma((V_j)_{k-1}, L^D)$$

est isomorphe à $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L^D_{P_j}$. L'application η_D^k restreinte à E_D^k induit donc une application linéaire

$$\varphi_D^k : E_D^k \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L^D_{P_j}, \tag{4.3}$$

qui envoie une section de L^D s'annulant à l'ordre k en les P_j le long des $\widehat{V}_j$ sur le $(k+1)$-ième « coefficient de Taylor » de sa restriction à $\widehat{V}$. Par définition, le noyau de φ_D^k est égal à E_D^{k+1}.

Soit $\mathscr{X}$ un modèle projectif de X plat sur $\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_K)$, c'est-à-dire un schéma projectif plat sur $\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_K)$ dont la fibre générique $\mathscr{X}_K$ est isomorphe à X. Les points rationnels P_j s'étendent en des sections $\mathscr{P}_j$ du morphisme π : $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}\, \mathfrak{o}_K$. Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathscr{X}$ dont la restriction $L = \mathscr{L}_K$ à X est ample.

Posons $\mathscr{E}_D = \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes D})$. On munit ce $\mathfrak{o}_K$-module d'une structure de fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathscr{E}_D}$ sur $\mathrm{Spec}\, o_K$ en définissant les métriques de John associées aux normes-infini sur $\mathscr{E}_{D,\sigma} = \mathscr{E}_D \otimes_{\mathfrak{o}_K,\sigma} \mathbf{C}$, pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbf{C}$, comme expliqué au paragraphe 1.4.

Soit $P_j \in X(K)$ un point rationnel. Le K-espace vectoriel $\mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L^D_{P_j}$ peut être naturellement muni de structures entière et hermitienne (voir le paragraphe 3.3). La somme directe de ces fibrés vectoriels hermitiens est munie d'une structure de fibré vectoriel hermitien en prenant la somme orthogonale des métriques hermitiennes.

Soit $h_J(\varphi_D^k)$ la hauteur du morphisme d'évaluation relative aux normes définies ci-dessus. On notera dans la suite $h(\varphi_D^k)$ la hauteur du morphisme d'évaluation φ_D^k (4.3) obtenue en remplaçant les normes hermitiennes sur $\mathscr{E}_{D,\sigma}^k$ par la norme-infini,

$$h(\varphi_D^k) = \sum_{\mathfrak{p}} \log \|\varphi_D^k\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|\varphi_D^k\|_{\sigma,\infty},$$

où $\|\varphi_D^k\|_{\sigma,\infty} = \sup_{s \in E_{D,\sigma}^k \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi_D^k(s)\|_{Sym.}}{\|s\|_{\sigma,\infty}}$.

Soit α un nombre réel positif. Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ le sous-schéma formel $\widehat{V}_j$ soit α-arithmétique et soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Alors les morphismes d'évaluation φ_D^k (définis par (6.3)) le long des m sous-schémas formels vérifient également : pour tout ensemble fini S de places de K, il existe un nombre réel strictement positif C tel que

$$\frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in \Sigma_K \setminus S} \log \left\|\varphi_D^k\right\|_v \leqslant \overline{\alpha} k \log k + C(k + D).$$

En effet, écrivons $\varphi_D^k = \left(\varphi_{D,1}^k, \ldots, \varphi_{D,m}^k\right) : E_D^k \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L_{P_j}^D$, où $E_D^k = \{s \in \Gamma(X, L^{\otimes D}) \; | s_{|(V_1)_{k-1}} = \cdots = s_{|(V_m)_{k-1}} = 0\}$. Alors, si $\|\cdot\|$ est une norme ultramétrique sur le complété de $\bigoplus_{j=1}^m \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L_{P_j}^D$ en une place finie, on a

$$\|\varphi_D^k(s)\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\varphi_{D,j}^k(s)\|,$$

et si $\|\cdot\|$ est une norme archimédienne sur le complété de $\bigoplus_{j=1}^m \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L_{P_j}^D$ en une place archimédienne,

$$\begin{aligned} \|\varphi_D^k(s)\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \|\varphi_{D,j}^k(s)\|^2} \\ &\leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\varphi_{D,j}^k(s)\|. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $c = \max\{\log(\sqrt{m})[K : \mathbf{Q}], 1\}$, on a

$$h(\varphi_D^k) \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant m} h(\varphi_{D,j}^k) + c.$$

De plus, pour $j \in \{1, \ldots, m\}$, l'application $\varphi_{D,j}^k$ est la restriction de $\varphi_{D,\widehat{V}_j}^k$ au sous-espace vectoriel $E_{D,\widehat{V}_j}^k$ de E_D^k formé des sections qui s'annulent à l'ordre au moins k le long de $\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m$. En toute place v de K, sa norme est donc inférieure à celle de $\varphi_{D,\widehat{V}_j}^k$ et par conséquent,

$$h_v(\varphi_{D,j}^k) \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant m} h_v(\varphi_{D,\widehat{V}_j}^k),$$

et donc

$$h_v(\varphi_D^k) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m} h_v(\varphi_{D,\widehat{V}_j}^k) + c. \tag{4.4}$$

En particulier, si les $\widehat{V}_j$ sont tous α-arithmétiques, $\widehat{V}$ vérifie aussi : pour tout ensemble fini S de places de K, pour tout $\overline{\alpha} > \alpha$, il existe un nombre réel strictement positif C tel que

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v\in\Sigma_K\setminus S} \log \left\| \varphi_D^k \right\|_v \leqslant \overline{\alpha} k \log k + C(k+D). \tag{4.5}$$

4.4. Inégalité de pentes

Avec ces notations et ces choix des fibrés vectoriels hermitiens, des filtrations et morphismes d'évaluation, en notant $h_J(\varphi_D^k)$ la hauteur du morphisme d'évaluation relative aux normes hermitiennes définies ci-dessus, l'inégalité de pentes (1.10) s'écrit :

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{rg}(E_D^k/E_D^{k+1}) \left(\widehat{\mu}_{\max} \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k\, \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}} \otimes \overline{\mathscr{L}}_{|P_j}^{\otimes D} \right) + h_J(\varphi_D^k) \right).$$

D'après l'inégalité (1.14), l'inégalité suivante faisant intervenir la hauteur $h(\varphi_D^k)$ est également valable, bien que cette hauteur ne provienne pas de normes hermitiennes aux places archimédiennes.

(4.6)
$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{rg}(E_D^k/E_D^{k+1}) \left(\widehat{\mu}_{\max} \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k\, \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}} \otimes \overline{\mathscr{L}}_{|P_j}^{D} \right) + h(\varphi_D^k) \right).$$

Nous donnons maintenant une majoration de la pente maximale intervenant dans cette inégalité de pente, ainsi qu'une minoration du degré arithmétique.

Lemme 4.8. — *Avec les mêmes notations que précédemment. Il existe un nombre réel $C_1 > 0$ tel que*

$$\widehat{\mu}_{\max} \left(\bigoplus_{1\leqslant j\leqslant m} \mathrm{Sym}^k\, \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}} \otimes \overline{\mathscr{L}}_{|P_j}^{D} \right) \leqslant C_1(k+D).$$

Démonstration. — Ce lemme est un corollaire du lemme 1.5. D'après (1.6),

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{1\leqslant j\leqslant m}\operatorname{Sym}^k\overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}}\otimes\overline{\mathscr{L}}^D_{|P_j}\right) &= \max_{1\leqslant j\leqslant m}\widehat{\mu}_{\max}\left(\operatorname{Sym}^k\overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}}\otimes\overline{\mathscr{L}}^D_{|P_j}\right)\\ &= \max_{1\leqslant j\leqslant m}\widehat{\mu}_{\max}(\operatorname{Sym}^k\overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}})+\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}^D_{|P_j})\\ &= \max_{1\leqslant j\leqslant m}\widehat{\mu}_{\max}(\operatorname{Sym}^k\overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}})+D\,\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{|P_j})\end{aligned}$$

d'après (1.4). D'après l'inégalité (1.5), il existe un nombre réel c strictement positif tel que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{1\leqslant j\leqslant m}\operatorname{Sym}^k\overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}}\otimes\overline{\mathscr{L}}^D_{|P_j}\right) &\leqslant ck+D\max_j\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{|P_j})\\ &\leqslant C_1(k+D),\end{aligned}$$

où C_1 est un nombre réel strictement positif. □

Rappelons que d'après le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique 1.13, il existe un nombre réel $C>0$ tel que

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D)\geqslant -CD^{n+1}.$$

L'inégalité de pentes (4.6) se récrit donc

$$-CD^{n+1}\leqslant\sum_{k\geqslant 0}\operatorname{rg}(E^k_D/E^{k+1}_D)(C_1(k+D)+h(\varphi^k_D)). \tag{4.7}$$

4.5. Majoration de la hauteur du morphisme d'évaluation

On reprend les notations du théorème 4.6.

Lemme 4.9. — *Supposons que $\widehat{V}_1,\ldots,\widehat{V}_m$ sont α-arithmétiques et soit $\overline{\alpha}>\alpha$. Alors il existe un nombre réel C strictement positif tel que, pour tous nombres entiers $k\geqslant 0$ et $D\geqslant 1$,*

$$\sum_{v\in\Sigma_K\setminus\{v_0\}}h_v(\varphi^k_D)\leqslant\overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]k\log k+C(k+D).$$

Démonstration. — Ce lemme se déduit immédiatement de la définition d'α-arithméticité, avec $S=\{v_0\}$, et de (4.5). □

Lemme 4.10. — *Supposons que la famille de sous-schéma formel $(\widehat{V}_1,\ldots,\widehat{V}_m)$ admette une uniformisation d'ordre inférieur à $\rho>0$ en une place v_0 de K. Soit λ un nombre réel strictement positif tel que*

$$\lambda\rho<m. \tag{4.8}$$

Alors il existe un nombre réel C strictement positif tel que, pour tous nombres entiers naturels $D \geqslant 1$ et k,

$$h_{v_0}(\varphi_D^k) \leqslant C(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D}.$$

Cette majoration cruciale, à la place privilégiée, donnée par le lemme 4.10 provient de l'uniformisation de $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$. Sa démonstration utilise de l'analyse, complexe ou p-adique selon que la place v_0 est archimédienne ou finie, sous la forme d'un *lemme de Schwarz*.

De ces deux lemmes on déduit directement la proposition suivante, qui donne une majoration de la hauteur de φ_D^k.

Proposition 4.11. — *Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\widehat{V}_j$ est α-arithmétique et soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Soit $\rho > 0$. Supposons que la famille de sous-schémas formels $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ admet une uniformisation d'ordre inférieur à ρ en une place v_0. Soit λ un nombre réel strictement positif tel que $\lambda\rho < m$. Alors il existe un nombre réel C positif tel que, pour tous nombres entiers naturels $D \geqslant 1$ et k,*

$$h(\varphi_D^k) \leqslant (\overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}] - \lambda) k \log k + \lambda k \log D + C(k+D).$$

Démonstration du lemme 4.10. — Dans cette démonstration, on omettra l'indice v_0 pour noter la valeur absolue de K correspondant à la place v_0. De même, on notera simplement $\|\cdot\|$ les normes sur les complétés à la place v_0 des espaces E_D^k, F_D^k.

Comme la famille de sous-schéma formels $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ admet une uniformisation d'ordre inférieur à $\rho > 0$ en v_0, il existe une courbe algébrique M projective, connexe et lisse sur $\mathbf{C}_{v_0}$, un ensemble fini $T \subset M$, une application holomorphe

$$\Theta : M \setminus T \to X(\mathbf{C}_{v_0}),$$

des points distincts $w_1, \ldots, w_m$ de $M \setminus T$ tels que $\Theta(w_j) = x_j$ et le germe de courbe formelle paramétré par Θ au voisinage de x_j coïncide avec $\widehat{V}_j$ (*cf.* définition 4.5). L'uniformisation étant d'ordre inférieur à ρ, d'après la définition 4.1 et le lemme 4.3, il existe $\eta \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^* L^{-1})$ ne s'annulant pas en $w_1, \ldots, w_m$, des nombres réels A_1, A_2 tels que

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} \quad \text{pour tout } z \text{ suffisamment proche de } \tau, \tag{4.1}$$

et $\sum_{\tau \in T} \rho_\tau \leqslant \rho$.

Pour tout point $x \in M(\mathbf{C}_{v_0})$, fixons un paramètre local u_x au voisinage de x et un voisinage ouvert D_x de x tel que u_x restreinte à D_x soit un isomorphisme analytique sur le disque de centre 0 et de rayon 1.

On note respectivement $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ la partie entière inférieure et la partie entière supérieure d'un nombre réel x.

Lemme 4.12. — *Soit M une courbe algébrique projective lisse connexe sur un corps algébriquement clos k et soient $T, W \subset M(k)$ des ensembles finis disjoints. Pour tout $\tau \in T$ soit $\mu_\tau > 0$ tel que $\sum_{\tau\in T}\mu_\tau < \mathrm{Card}(W)$. Alors pour tout nombre entier a assez grand, il existe une fonction rationnelle R_a sur M, régulière sur $M \setminus W$ ayant des pôles d'ordre exactement a en $w \in W$ et un zéro d'ordre $n_\tau \geqslant \lceil a\mu_\tau \rceil$ en chaque $\tau \in T$.*

Démonstration. — Si D est un diviseur sur M, notons $h^0(D)$ la dimension sur F de l'espace des sections $H^0(M, \mathscr{O}_M(D))$. Si D est un diviseur à coefficients réels, $D = \sum \lambda_P[P]$, avec $\lambda_P \in \mathbf{R}$ pour tout P, on note $\lfloor D \rfloor$ le diviseur à coefficients entiers $D = \sum \lfloor \lambda_P \rfloor [P]$. Notons K_M un diviseur canonique de M.

Considérons le diviseur à coefficients réels

$$\Delta = \sum_{w\in W}[w] - \sum_{\tau\in T}\mu_\tau[\tau].$$

Le degré de Δ, $\deg(\Delta) = \mathrm{Card}(W) - \sum_{\tau\in T}\mu_\tau$, est strictement positif d'après l'hypothèse faite sur la somme des μ_τ. Pour tout nombre entier naturel a non nul, on a, d'après le théorème de Riemann-Roch :

$$h^0(\lfloor a\Delta\rfloor) - h^0(K_M - \lfloor a\Delta\rfloor) = \deg(\lfloor a\Delta\rfloor) + 1 - g$$

et, pour tout $w \in W$,

$$h^0(\lfloor a\Delta\rfloor - [w]) - h^0(K_M - \lfloor a\Delta\rfloor + [w]) = \deg(\lfloor a\Delta\rfloor) - g.$$

Lorsque a tend vers l'infini, $\deg(\lfloor a\Delta\rfloor) \sim a\deg(\Delta)$. Prenons pour a un nombre entier assez grand tel que $\deg(\lfloor a\Delta\rfloor) \geqslant 2g$. Alors,

$$h^0(M, K_M - \lfloor a\Delta\rfloor) = h^0(K_M - \lfloor a\Delta\rfloor + [w]) = 0.$$

Par conséquent, les $H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor - [w]))$, pour $w \in W$ sont des hyperplans de $H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor))$. Comme le corps k est infini, il existe

$$R_a \in H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor)) \setminus \bigcup_{w\in W} H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor - [w])).$$

La fonction rationnelle R_a a un pôle d'ordre exactement a en chaque $w \in W$, pas d'autre pôle, et un zéro d'ordre au moins $\lceil a\mu_\tau\rceil$ en $\tau \in T$. □

Soient a un nombre entier naturel non nul et $(\mu_\tau)_{\tau\in T}$ une famille de nombres réels strictement positifs dont la somme est strictement inférieure à m et telle que, pour tout $\tau \in T$,

$$\mu_\tau \geqslant \lambda\rho_\tau. \tag{4.9}$$

Soit R_a une fonction rationnelle sur M ayant un pôle d'ordre exactement a en chaque $w_1, \dots, w_m$, pas d'autre pôle, et un zéro d'ordre $n_\tau \geqslant \lceil a\mu_\tau\rceil$ en $\tau \in T$. La paramètre a est ici auxiliaire et n'apparaîtra plus dans les majorations finales de la hauteur du morphisme d'évaluation.

Soient k, D deux nombres entiers naturels, $D \geqslant 1$, et soit $s \in E_D^k$. Alors $\Theta^*(s)\eta^D$ est une fonction holomorphe sur $M \setminus T$ et s'annule au moins à l'ordre k en $w_1, \ldots, w_m$. Son image par le morphisme d'évaluation φ_D^k est

$$\varphi_D^k(s) = (\varphi_1^k(s), \ldots, \varphi_n^k(s)),$$

où

$$\varphi_j^k(s) = c_{j,k}(\Theta_* \frac{\partial}{\partial z}(w_j))^{\otimes -k}\eta(w_j)^{-D} \in \mathrm{Sym}^k(\Omega^1_{\widehat{V}_j}) \otimes \mathcal{O}(D)_{x_j}, \tag{4.10}$$

et $c_{j,k} = \lim_{z \to w_j} \frac{\Theta^* s\eta^D(z)}{u_{w_j}(z)^k}$.

En posant $C_0 = \max_{j \in \{1,\ldots,m\}} \max(|\Theta_* \frac{\partial}{\partial z}(w_j))^{\otimes k}|, |\eta(w_j)^{-D}|)$,

$$\|\varphi_D^k(s)\| \leqslant C_0^{k+D} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |c_{j,k}|. \tag{4.11}$$

Majorons la valeur absolue de $c_{j,k}$. On a :

$$\begin{aligned} |c_{j,k}|^a &= \lim_{z \to w_j} \left|(\Theta^*(s)\eta^D(z))^a R_a(z)^k\right| \lim_{z \to w_j} \left|R_a(z)^{-k} u_{w_j}(z)^{-ak}\right| \\ &= C_1^{ak} \lim_{z \to w_j} \left|(\Theta^*(s)\eta^D(z))^a R_a(z)^k\right|, \end{aligned} \tag{4.12}$$

où $C_1 = \lim_{z \to w_j} \left|R_a(z)^{-k} u_{w_j}(z)^{-ak}\right|^{\frac{1}{a}}$.

La fonction $(\Theta^*(s)\eta^D)^a R_a^k$ est holomorphe sur $M \setminus T$, car $(\Theta^*(s)\eta^D)^a$ s'annule à l'ordre au moins ak en $w_1, \ldots, w_m$ et R_a^k a un pôle d'ordre exactement ak en $w_1, \ldots, w_m$. Soit r un nombre réel strictement positif. Appliquons à cette fonction holomorphe un principe du maximum sur le domaine $\{|R_a(z)| \geqslant r^a\}$. Si la place v_0 est archimédienne, il s'agit du principe du maximum usuel en analyse complexe. Si v_0 est une place ultramétrique, il est donné par la proposition suivante, démontrée dans [Bost et Chambert-Loir, 2009] prop B.11.

Proposition 4.13. — *Soit k un corps ultramétrique complet, et soit M une courbe projective lisse et connexe sur k. Soit $f \in k(M)$ une fonction rationnelle non constante, et soit X le domaine de Weierstrass*

$$X = \{x \in M(k); |f(x)| \leqslant 1\}.$$

Alors, toute fonction affinoïde g sur X est bornée. De plus, il existe $x \in X$ tel que

$$|g(x)| = \sup_X |g| \quad et \quad |f(x)| = 1.$$

Supposons r suffisamment petit pour que w_j appartienne à $\{|R_a(z)| \geqslant r^a\}$, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\lim_{z \to w_j} \left| \left(\Theta^*(s)\eta^D(z)\right)^a R_a(z)^k \right| &\leqslant \max_{\{|R_a(z)| \geqslant r^a\}} \left| \left(\Theta^*(s)\eta^D(z)\right)^a R_a(z)^k \right| \\ &\leqslant \max_{\{|R_a(z)| = r^a\}} \left| \left(\Theta^*(s)\eta^D(z)\right)^a R_a(z)^k \right|,\end{aligned}$$

d'après la proposition 4.13. Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{z \to w_j} \left| \left(\Theta^*(s)\eta^D(z)\right)^a R_a(z)^k \right| &\leqslant r^{ak} \max_{\{|R_a(z)| = r^a\}} \left| \left(\Theta^*(s)\eta^D(z)\right)^a \right| \\ &\leqslant r^{ak} \|s\|^a_{v_0,\infty} \max_{\{|R_a(z)| = r^a\}} |\eta(z)|^{Da}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

La section η est d'ordre au plus $(\rho_\tau)_{\tau \in T}$ en T. Par définition (voir la définition 4.1), il existe des nombres réels positifs A_1, A_2 tels que, pour tout $\tau \in T$, il existe un voisinage $U_\tau \subset D_\tau$ de τ tel que, pour tout $z \in U_\tau$,

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}}.$$

La fonction R_a a un zéro d'ordre n_τ en $\tau \in T$, donc il existe un nombre réel A_3 strictement positif et un voisinage $U'_\tau \subset U_\tau$ de τ tels que, pour tout $z \in U'_\tau$, $|R_a(z)| \leqslant A_3 |u_\tau(z)|^{n_\tau}$. Ainsi, pour tout $z \in U'_\tau$,

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 \exp\left(A_2 A_3^{\frac{\rho_\tau}{n_\tau}} |R_a(z)|^{-\frac{\rho_\tau}{n_\tau}} \right).$$

Il existe donc $r_0 \in]0, 1[$ tel que, pour tout $r \leqslant r_0$,

$$\max_{\{|R_a(z)| = r^a\}} \|\eta(z)\| \leqslant A_1 \max_{\tau \in T} \exp\left(A_4 r^{-a\frac{\rho_\tau}{n_\tau}} \right), \tag{4.14}$$

en posant $A_4 = A_2 \max_{\tau \in T} A_3^{\frac{\rho_\tau}{n_\tau}}$. Rappelons que, pour tout $\tau \in T$,

$$n_\tau \geqslant \lceil a\mu_\tau \rceil \geqslant a\mu_\tau.$$

Par conséquent,

$$\max_{\tau \in T} r^{-\frac{\rho_\tau}{n_\tau}} \leqslant r^{-\frac{\rho_\tau}{a\mu_\tau}} \leqslant r^{-\frac{1}{a\lambda}},$$

car $\frac{\rho_\tau}{\mu_\tau} \leqslant \frac{1}{\lambda}$ (4.9). Par suite, d'après (4.14), pour tout $r < r_0$, on a

$$\max_{\{|R_a(z)| = r^a\}} \|\eta(z)\| \leqslant A_1 \exp\left(A_4 r^{-\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Avec cette majoration de la norme de la section η, l'inégalité (4.13) devient :

$$\lim_{z \to w_j} \left| \left(\Theta^*(s)\eta^D(z)\right)^a R_a(z)^k \right| \leqslant r^{ak} \|s\|^a_{v_0,\infty} A_1^{Da} \exp\left(aDA_4 r^{-\frac{1}{\lambda}} \right),$$

et ainsi, d'après (4.12), pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$|c_{j,k}| \leqslant C_1^k r^k \|s\|_{v_0,\infty} A_1^D \exp\left(DA_4 r^{-\frac{1}{\lambda}}\right).$$

D'après (4.11), cette inégalité fournit la majoration suivante de la norme de l'image de s par le morphisme d'évaluation φ_D^k,

$$\|\varphi_D^k(s)\| \leqslant C_0^{k+D} C_1^k r^k A_1^D \exp\left(DA_4 r^{-\frac{1}{\lambda}}\right) \|s\|_{v_0,\infty}.$$

Alors, pour $r \leqslant r_0$,

$$h_{v_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_2(k+D) + k \log r + A_4 D r^{-\frac{1}{\lambda}},$$

où $C_2 = \log C_0 + \max(0, \log C_1) + \max(0, \log A_1)$.

Fixons maintenant

$$r = \min\left\{r_0, \left(\frac{\lambda k}{A_4 D}\right)^{-\lambda}\right\}.$$

Si $r = \left(\frac{\lambda k}{A_4 D}\right)^{-\lambda}$, *i.e.* pour $\frac{k}{D} \geqslant \frac{A_4}{\lambda} r_0^{-\frac{1}{\lambda}}$, alors

$$\begin{aligned} \log \|\varphi_D^{k,l}\|_{v_0} &\leqslant C_2(k+D) - \lambda k \log\left(\frac{\lambda k}{A_4 D}\right) + \lambda k \\ &\leqslant C_3(k+D) - \lambda k \log k + \lambda k \log D \\ &\leqslant C_3(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

où C_3 est un nombre réel strictement positif.

Si $r = r_0$, c'est-à-dire si $\frac{k}{D} \leqslant \frac{A_4}{\lambda} r_0^{-\frac{1}{\lambda}}$, montrons qu'il existe $C_4 > 0$ tel que la hauteur à la place v_0 du morphisme d'évaluation φ_D^k vérifie la majoration suivante

$$\log \|\varphi_D^k\| \leqslant C_4(k+D). \tag{4.16}$$

D'après (4.11),

$$\|\varphi_D^k(s)\| \leqslant C_0^{k+D} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |c_{j,k}|,$$

où $c_{j,k} = \lim_{z \to w_j} \frac{\Theta^* s \eta^D(z)}{u_{w_j}(z)^k}$. Soit j tel que $|c_{j,k}|$ réalise le maximum des $|c_{i,k}|$, pour $i \in \{1, \ldots, m\}$. En appliquant le principe du maximum à la fonction holomorphe $\frac{\Theta^* s \eta^D(z)}{u_{w_j}(z)^k}$ sur un petit disque $\mathscr{D}$ autour de w_j, qui ne rencontre pas T et ne contient aucun w_i avec $i \neq j$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\varphi_D^k(s)\| &\leqslant C_0^{k+D} + |c_{j,k}| \\ &\leqslant C_0^{k+D} \max_{z\in\mathscr{D}} |\Theta^* s\eta^D(z)| \max_{z\in\mathscr{D}} |u_{w_j}(z)^{-1}|^k \\ &\leqslant C_0^{k+D} \|s\| \max_{z\in\mathscr{D}} |\eta(z)|^D \max_{z\in\mathscr{D}} |u_{w_j}(z)^{-1}|^k.\end{aligned}$$

En posant $C_4 = \log(C_0) \max_{z\in\mathscr{D}} |\eta(z)| \max_{z\in\mathscr{D}} |u_{w_j}(z)^{-1}|$, on obtient donc la majoration (4.16) du morphisme d'évaluation.

Or $\log \frac{k}{D} \leqslant -\frac{1}{\lambda} \log r_0 + \log \frac{A_4}{\lambda}$, donc pour tout $C_5 > 0$,

$$\begin{aligned}C_5(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D} &\geqslant C_5(k+D) + k\left(\log r_0 - \lambda \log \frac{A_4}{\lambda}\right) \\ &\geqslant (C_5 + \log r_0 - \lambda \log \frac{A_4}{\lambda})k + C_5 D.\end{aligned}$$

Posons $C_5 = \max(C_4, C_4 + \lambda \log \frac{A_4}{\lambda} - \log r_0)$. Alors,

$$h_{v_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_4(k+D) \leqslant C_5(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D}.$$

La majoration (4.15) est donc encore valable pour les petites valeurs de $\frac{k}{D}$, quitte à remplacer C_3 par C_5. Finalement, il existe un nombre réel $C > 0$ tel que pour tous nombres entiers k, D,

$$h_{v_0}(\varphi_D^k) \leqslant C(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D},$$

ce qui conclut la démonstration du lemme 4.10. □

4.6. Application de l'inégalité de pentes

Proposition 4.14. — *Soient n, d deux nombres entiers naturels non nuls tels que $d \leqslant n$. Soit $(e_D^k)_{(k,D)\in\mathbf{N}^2}$ une famille de nombres entiers naturels, vérifiant*

1. *il existe un nombre réel strictement positif C_0 et un nombre entier naturel n tels que*
$$e_D^0 \underset{D\to\infty}{\sim} C_0 D^n,$$
2. *il existe un nombre entier naturel m tel que pour tous nombres entiers naturels k, D,*
$$0 \leqslant e_D^k - e_D^{k+1} \leqslant m(k+1)^{d-1}.$$

Supposons qu'il existe des nombres réels A, B avec $B \leqslant A$ et $A > 0$ et qu'il existe $C > 0$ tels que

$$-CD^{n+1} \leqslant \sum_{k\geqslant 1} (e_D^k - e_D^{k+1})\Big(C_{11}(k+D) + Ak \log D - Bk \log k\Big). \tag{4.17}$$

Alors

$$(n-d)A \leqslant (A-B)n.$$

Démonstration de la proposition 4.14. — Si $B \leqslant 0$, le résultat est vrai (car $A > 0$). Dans toute la suite de la démonstration, nous supposons $0 < B$.

Montrons tout d'abord quelques inégalités vérifiées par les termes de la suite e_D^k.

Lemme 4.15. — *Pour tout nombre entier naturel N,*

$$e_D^0 - e_D^N = \sum_{0 \leqslant k < N} (e_D^k - e_D^{k+1}) \leqslant mN^d, \tag{4.18}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k \geqslant N} (e_D^k - e_D^{k+1}) = e_D^N \geqslant e_D^0 - mN^d. \tag{4.19}$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant k < N} (e_D^k - e_D^{k+1}) &\leqslant m \sum_{0 \leqslant k < N} (k+1)^{d-1} \text{ d'après l'hypothèse 2 sur les } e_D^k \\ &\leqslant mN^d, \end{aligned}$$

puisque chacun des N termes de la somme est inférieur à N^{d-1}. □

Supposons par l'absurde que l'on ait

$$\frac{A}{B} < \frac{n}{d}.$$

Soit $\beta > 0$. Récrivons l'inégalité (4.17) en découpant la somme selon les termes d'indice $k \leqslant D^\beta$, et $k > D^\beta$. En posant

$$S_D(\beta) = \sum_{k \leqslant D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1}) \Big(- C_{11}(k+D) - Ak\log D + Bk\log k \Big),$$

et

$$S'_D(\beta) = \sum_{k > D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1}) \Big(- C_{11}(k+D) - Ak\log D + Bk\log k \Big),$$

l'inégalité (4.17) s'écrit :

$$S_D(\beta) + S'_D(\beta) \leqslant CD^{n+1}. \tag{4.20}$$

Lemme 4.16. — *Supposons $\beta \geqslant 1$. On a alors :*

$$|S_D(\beta)| = O(D^{\beta(d+1)} \log D).$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
|S_D(\beta)| &\leqslant \sum_{k\leqslant D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1})\Big(C_{11}D + C_{11}k + Ak\log D + Bk\log k\Big)\\
&\leqslant \sum_{k\leqslant D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1})\Big(C_{11}D + D^\beta(C_{11} + A\log D) + B\beta D^\beta \log D\Big)\\
&\leqslant C_{12}D^\beta \log D \sum_{k\leqslant D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1}) \qquad (\text{car } \beta \geqslant 1)\\
&\leqslant C'_{12}D^{\beta(d+1)}\log D \quad \text{d'après (4.18).}
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.17. — *Supposons $\beta \in]\frac{A}{B}, \frac{n}{d}[$. Il existe alors un nombre réel strictement positif C_{16} tel que, pour D assez grand,*

$$S'_D(\beta) \geqslant C_{16}D^{n+\beta}\log D.$$

Démonstration. — Minorons $S'_D(\beta)$.

Pour $k \geqslant D^\beta$,

$$B\log k \geqslant \beta B\log D.$$

Comme $\beta > \frac{A}{B}$,

$$B\log k - A\log D \geqslant C_{13}\log D,$$

où $C_{13} = \beta B - A > 0$.

$$S'_D(\beta) \geqslant \sum_{k>D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1})\Big(-C_{11}(k+D) + C_{13}k\log D\Big).$$

Pour D assez grand, $-C_{11} + C_{13}\log D \geqslant 0$, et donc

$$\begin{aligned}
S'_D(\beta) &\geqslant (-C_{11}D + D^\beta(-C_{11} + C_{13}\log D)) \sum_{k>D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1}),\\
&\geqslant C_{14}D^\beta \log D \sum_{k>D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1}),
\end{aligned}$$

pour D assez grand.

Or, $\sum_{k>D^\beta}(e_D^k - e_D^{k+1}) \geqslant e_D^0 - m([D^\beta]+1)^d$ d'après (4.19). Comme $\operatorname{rg} e_D^0 \sim CD^n$ d'après l'hypothèse 1 sur e_D^0 et $\beta d < n$, il existe un nombre réel strictement positif C_{15} telle que pour D assez grand,

$$\sum_{k>D^\beta} (e_D^k - e_D^{k+1}) \geqslant C_{15}D^n.$$

En posant $C_{16} = C_{14}C_{15}$, on obtient la minoration de $S'_D(\beta)$ voulue, à savoir : $S'_D(\beta) \geqslant C_{16}D^{n+\beta}\log D$. □

Pour achever la démonstration de la proposition 4.14, raisonnons par l'absurde et choisissons $\beta \in]\frac{A}{B}, \frac{n}{d}[$. Alors, d'après les lemmes 4.16 et 4.17,

$$S_D(\beta) + S'_D(\beta) \geqslant -C'_{12} D^{\beta(d+1)} \log D + C_{16} D^{n+\beta} \log D.$$

Comme $\beta(d+1) = \beta d + \beta < n + \beta$, il existe $C_{17} > 0$ tel que, pour tout D assez grand,

$$S_D(\beta) + S'_D(\beta) \geqslant C_{17} D^{n+\beta} \log D.$$

Cette inégalité contredit l'inégalité de pentes

$$S_D(\beta) + S'_D(\beta) \leqslant C D^{n+1}, \tag{4.20}$$

car $\beta > \frac{A}{B} \geqslant 1$. Par conséquent,

$$\frac{A}{B} \geqslant \frac{n}{d}.$$

On a donc

$$-dA \leqslant -nB,$$

et en ajoutant nA aux deux membres de cette inégalité, on obtient

$$(n-d)A \leqslant n(A-B).$$

ce qui démontre la proposition 4.14. □

4.7. Démonstration du théorème 4.6

Nous pouvons à présent terminer la démonstration du théorème 4.6. Soit $\overline{\alpha} > \alpha$. D'après la proposition 4.11 qui donne une majoration de la hauteur du morphisme d'évaluation, il existe un nombre réel C_5 strictement positif tel que, pour tout $(k, D) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, la hauteur du morphisme d'évaluation vérifie

$$h(\varphi_D^k) \leqslant C_5(k+D) + \lambda k \log D - (\lambda - \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]) k \log k.$$

L'inégalité de pentes (4.7) s'écrit donc

$$\begin{aligned} -CD^{n+1} &\leqslant \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{rg}(E_D^k / E_D^{k+1}) (C_1(k+D) + h(\varphi_D^k)) \\ &\leqslant \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{rg}(E_D^k / E_D^{k+1}) \Big(C_6(k+D) + \lambda k \log D - (\lambda - \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]) k \log k \Big), \qquad (4.21) \end{aligned}$$

où l'on a posé $C_6 = C_1 + C_5$.

Montrons que la suite $(e_D^k)_{k \in \mathbf{N}} = (\operatorname{rg}(E_D^k))_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie les hypothèses de la proposition 4.14, grâce aux encadrements des rangs des modules E_D^k et des rangs des quotients successifs de la filtration donnés par les lemmes suivants.

Lemme 4.18. — *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $D \in \mathbf{N}^*$,*

$$\operatorname{rg}(E_D^k / E_D^{k+1}) \leqslant m. \tag{4.22}$$

Démonstration. — Ces inégalités découlent de l'injectivité de l'application

$$\varphi_D^k : E_D^k / E_D^{k+1} \to \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\hat{V}_i}\right) \otimes L_{x_i}^D,$$

et du fait que la dimension du K-espace vectoriel $\mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\hat{V}_i}\right)$ est égale à 1. □

D'après le lemme 4.18, la suite (e_D^k) vérifie l'hypothèse 2 de la proposition 4.14 avec $d = 1$. De plus, d'après (1.12), e_D^0 vérifie l'hypothèse 1.

D'après la proposition 4.14, appliquée à $A = \lambda$ et $B = \lambda - \overline{\alpha}[K : \mathbf{Q}]$ (on a alors bien $A > 0$ et $B \leqslant A$), on a donc

$$(r-1)\lambda \leqslant \overline{\alpha}[K : \mathbf{Q}]r. \tag{4.23}$$

Si $\rho = 0$, alors on peut choisir λ aussi grand que l'on veut, et l'inégalité précédente apporte une contradiction. Donc $\rho \neq 0$, et en faisant tendre λ vers $\frac{m}{\rho}$ par valeurs inférieures dans l'inégalité (4.23) et en faisant tendre $\overline{\alpha}$ vers α (par valeurs supérieures), on achève la démonstration du théorème :

$$m \leqslant \alpha[K : \mathbf{Q}] \frac{r}{r-1} \sum_{\tau \in T} \rho_\tau.$$

CHAPITRE 5

POINTS ALGÉBRIQUES

Dans [Bertrand, 1977b], D. Bertrand démontre une amélioration du théorème de Schneider-Lang concernant les valeurs algébriques prises simultanément par des fonctions méromorphes et dont voici l'énoncé.

***Théorème 5.1* (Bertrand, 1977).** — *Soit k un corps de nombres. Considérons des fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_n$ sur $\mathbf{C}$ telles que $k[f_1, \ldots, f_n]$ est stable par la dérivation d/dz. Supposons f_1, f_2 algébriquement indépendantes et d'ordres finis ρ_1 et ρ_2. Pour tout nombre entier naturel non nul d, soit W_d l'ensemble des nombres complexes w distincts des pôles des fonctions de $f_1, \ldots, f_n$ tels que $k(f_1(w), \ldots, f_n(w))$ soit une extension de k de degré d. Soit ν_d le cardinal de W_d. Alors*

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\nu_d}{d} \leqslant (\rho_1 + \rho_2)[k : \mathbf{Q}].$$

Faisons quelques remarques sur ce théorème.

Remarques. — 1. Avec ces notations, on a

$$W_1 = \{w \in \mathbf{C} \mid f_1(w) \in k \text{ et } f_2(w) \in k\},$$

et le résultat fourni par le théorème de Schneider-Lang classique est l'inégalité $\nu_1 \leqslant (\rho_1 + \rho_2)[k : \mathbf{Q}]$.

2. Dans l'énoncé de D. Bertrand on peut supposer, sans perte de généralité, que le corps de nombres k sur lequel est définie l'équation différentielle est égal à $\mathbf{Q}$, quitte à ajouter des fonctions constantes aux fonctions $f_1, \ldots, f_n$.
3. Une conjecture de M. Waldschmidt (dans [Waldschmidt, 1977]) affirme que

$$\sum_{d=1}^{\infty} \nu_d \leqslant (\rho_1 + \rho_2),$$

c'est-à-dire que l'ensemble des points $w \in \mathbf{C}$ en lesquels les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ prennent simultanément des valeurs algébriques est fini, de cardinal inférieur à $\rho_1 + \rho_2$.

Dans le cas complexe, la généralisation géométrique de ce résultat a été faite par C. Gasbarri dans [Gasbarri, 2010] (théorème 4.16, et corollaire 4.17). Dans ce chapitre, nous donnons une démonstration détaillée d'un théorème de ce genre, valable également dans le cas ultramétrique.

5.1. Énoncé du théorème

Les places de $\mathbf{Q}$ qui correspondent à des valeurs absolues ultramétriques sont en bijection avec l'ensemble des nombres premiers ; on identifiera ainsi une place ultramétrique avec le nombre premier correspondant. On désigne la place archimédienne par le symbole ∞. On identifie ainsi l'ensemble $\Sigma_{\mathbf{Q}}$ des places de $\mathbf{Q}$ à l'ensemble $\{\infty, 2, 3, 5, \ldots\}$. Si p est une place de $\mathbf{Q}$, on note $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$; en particulier, $\mathbf{C}_\infty$ désigne le corps des nombres complexes.

Soit X une variété projective sur $\mathbf{Q}$, et soient $x_1, \ldots, x_m$ des points fermés de X. Pour $j \in \{1, \ldots, m\}$, notons $K_j = \mathbf{Q}(x_j)$ le corps résiduel de x_j, d_j son degré sur $\mathbf{Q}$ et soit $\widehat{V}_j$ un sous-K_j-schéma formel lisse de dimension 1 du complété $\widehat{X}_{x_j}$ de X en x_j. Soit L un fibré en droite ample sur X.

Fixons une place p_0 de $\mathbf{Q}$, finie ou archimédienne. Supposons qu'en cette place p_0 le schéma formel $\widehat{V} = \cup_{j=1}^m \widehat{V}_j$ admette une uniformisation, c'est-à-dire supposons qu'il existe une courbe affine lisse, connexe M_0 sur $\mathbf{C}_{p_0}$, une application holomorphe

$$\Theta : M_0 \to X(\mathbf{C}_{p_0})$$

et des points distincts $w_1, \ldots, w_m$ de M_0 tels que $\Theta(w_j) = \xi_j$, où $\xi_j \in X(\mathbf{C}_{p_0})$ est un point géométrique au-dessus du point fermé x_j, et le germe de courbe formelle paramétré par Θ au voisinage de ξ_j coïncide avec $\widehat{V}_j$. On notera M la compactification projective lisse de M_0 et T le complémentaire (fini) de M_0 dans M, de sorte que $M_0 = M \setminus T$. On rappelle qu'une telle uniformisation est dite d'ordre inférieur à ρ_τ en $\tau \in T$ s'il existe une section globale non nulle $\eta \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^*(L^{-1}))$ telle que, si u_τ est un paramètre local de M au voisinage de τ, il existe des nombres réels strictement positifs A_1, A_2, δ_1 tels que

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2 |u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} \quad \text{pour tout } z \text{ suffisamment proche de } \tau.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, le point géométrique ξ_j définit un morphisme de $\mathscr{O}_{X,x_j}$ dans $\mathbf{C}_{p_0}$ dont le noyau est l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{x_j}$, donc qui se factorise en un plongement σ_j de $\mathscr{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{x_j} = K_j$ dans $\mathbf{C}_{p_0}$.

Théorème 5.2. — *Soit X une variété projective sur $\mathbf{Q}$ et soient $x_1, \dots, x_m$ des points fermés de X. Pour $j \in \{1, \dots, m\}$, notons $K_j = \mathbf{Q}(x_j)$ le corps résiduel de x_j et d_j son degré sur $\mathbf{Q}$. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-K_j-schéma formel lisse α-arithmétique de dimension 1 du complété $\widehat{X}_{x_j}$ de X en x_j. Supposons que la famille de sous-schéma formels $(\widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_m)$ admet une uniformisation d'ordre inférieur à $\rho > 0$ en une place p_0 de $\mathbf{Q}$, finie ou archimédienne. Soit r la dimension de l'adhérence de Zariski de $\widehat{V} = \bigcup_{j=1}^m \widehat{V}_j$ dans X.*

Alors,

– *ou bien $r > 1$ et*

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d_j} \leqslant \frac{r}{r-1}\alpha\rho,$$

– *ou bien $r = 1$, c'est-à-dire les $\widehat{V}_j$ sont tous algébriques.*

Avant de commencer à démontrer le théorème 5.2, donnons quelques explications sur l'idée de la démonstration, qui est une adaptation de celle du chapitre 4. Pour appliquer la *méthode des pentes*, nous allons définir un morphisme d'évaluation le long des m sous-schémas formels $\widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_m$ sur un corps de nombres K contenant les corps résiduels de chacun des points $x_1, \dots, x_m$. Pour cela, on définit une filtration par l'ordre d'annulation définie sur le corps de base $\mathbf{Q}$ et on étend les scalaires à K. Si l'on reprend telle quelle la démonstration du théorème 5.2, on obtient alors la majoration suivante :

$$m \leqslant [K : \mathbf{Q}]\frac{r}{r-1}\alpha\rho.$$

On peut améliorer cette majoration en remarquant que, pour chaque sous-schéma formel, l'hypothèse d'uniformisation fournit une bonne majoration en plusieurs places du grand corps K et non une seule. On obtient ainsi : $m \leqslant \max_j d_j \frac{r}{r-1}\alpha\rho$, et donc

$$\frac{\nu_1 + \dots + \nu_d}{d} \leqslant \frac{r}{r-1}\alpha\rho.$$

Pour obtenir la conclusion du théorème 5.2, il faut de plus adapter la filtration de manière à dériver à des vitesses différentes en les différents points, en fonction de leur degré.

5.2. Choix de la filtration

Soit L un fibré en droites ample sur X. Comme pour le théorème 4.6, on filtre l'espace E_D des sections de L^D par l'ordre d'annulation le long des sous-schémas formels $\widehat{V}_i$, mais cette fois, à un cran donné de la filtration on n'impose pas le même ordre d'annulation le long des m sous-schémas formels.

Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres entiers compris entre 1 et m et posons $a_0 = 0$. Pour tout k, le terme a_k indique que l'on impose aux sections appartenant au $(k+1)$-ième cran E_D^k de la filtration de s'annuler le long de $\widehat{V}_{a_k}$ à un ordre un de plus qu'au cran précédent E_D^{k-1}.

Pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$ et tout $k \in \mathbf{N}$, posons

$$\omega_i(k) = \operatorname{Card}\{0 \leqslant j < k \mid a_j = i\} = \sum_{0\leqslant j<k} \delta_{a_j,i},$$

où $\delta_{u,v}$ désigne le symbole de Kronecker,

$$\delta_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq v \\ 1 & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}$ galoisienne, incluse dans $\mathbf{C}_{p_0}$, contenant les corps $\sigma_1(K_1),\ldots,\sigma_m(K_m)$. Notons aussi

$$n_k = \omega_{a_k}(k) \tag{5.1}$$

et définissons les $\mathbf{Q}$-espace vectoriel et K-espace vectoriel suivants :

$$E_{\mathbf{Q},D} = \Gamma(X, L^D),$$

et

$$E_{K,D} = E_{\mathbf{Q},D} \otimes_{\mathbf{Q}} K.$$

Définissons $\eta_{\mathbf{Q},D}$ le morphisme de restriction de $E_{\mathbf{Q},D} = \Gamma(X, L^D)$ dans $\bigoplus_{j=1}^m \Gamma(\widehat{V}_j, L^D)$. Nous allons nous intéresser à l'extension des scalaires de cette application $\mathbf{Q}$-linéaire à K. Afin de la décrire, nous démontrons le lemme suivant qui précise l'extension des scalaires du K_j-espace vectoriel $\Gamma(\widehat{V}_j, L^D)$, pour tout $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Lemme 5.3. — *Pour tout $j \in \{1,\ldots,m\}$, soit I_j l'idéal de $\mathscr{O}_{\widehat{X}_{x_j}} \simeq K_j[[U]]$ définissant $\widehat{V}_j$. Alors*

$$\Gamma(\widehat{V}_j, L^D) \otimes_{\mathbf{Q}} K = \bigoplus_{\sigma: K_j \hookrightarrow K} \Gamma(\widehat{V}_{\sigma(\xi_j)}, L^D),$$

où $\widehat{V}_{\sigma(\xi_j)}$ désigne le sous-K-schéma formel de $\operatorname{Spf} K[[U]]$ *défini par l'idéal $K\sigma(I_j)$.*

Démonstration. — Le complété formel $\widehat{X}_{x_j}$ de X en le point x_j de corps résiduel K_j est isomorphe au spectre formel d'un anneau $K_j[[U]] = K_j[[U_1,\ldots,U_n]]$. L'extension des scalaires de $\mathbf{Q}$ à K s'écrit

$$K_j[[U]] \otimes_{\mathbf{Q}} K = (K_j \otimes_{\mathbf{Q}} K)\,[[U]],$$

car K est une extension finie de $\mathbf{Q}$. La K_j-algèbre $K_j \otimes_{\mathbf{Q}} K$ est isomorphe au produit $\prod_{\sigma:K_j\hookrightarrow K} K_\sigma$. Ainsi,

$$\widehat{X}_{x_j} \otimes_{\mathbf{Q}} K \simeq \bigoplus_{\sigma:K_j\hookrightarrow K} \widehat{X}_{x_j,\sigma},$$

où $\widehat{X}_{x_j,\sigma} = \mathrm{Spf}(K_\sigma[[U]])$. Soit I_j l'idéal de $K_j[[U]]$ correspondant au sous-schéma formel lisse $\widehat{V}_j$ de X_{x_j}. Le produit tensoriel de l'anneau $K_j[[U]]/I_j$ par K sur $\mathbf{Q}$ vaut :

$$\begin{aligned}(K_j[[U]]/I_j) \otimes_{\mathbf{Q}} K &= (K_j[[U]]/I_j) \otimes_{\mathbf{Q}} K \\ &= (K_j[[U]] \otimes_{\mathbf{Q}} K)\,/(KI_j) \\ &\simeq \prod_{\sigma:K_j\hookrightarrow K} K_\sigma[[U]]/(K_{\sigma_j} I_j),\end{aligned}$$

où $K_{\sigma_j} I_j$ désigne l'idéal engendré par l'image de I_j par l'injection $K_j[[U]]$ dans $K_\sigma[[U]]$. Par conséquent,

$$\Gamma(\widehat{V}_j, L^D) \otimes_{\mathbf{Q}} K = \bigoplus_{\sigma:K_j\hookrightarrow K} \Gamma(\widehat{V}_{\sigma(\xi_j)}, L^D),$$

où $\widehat{V}_{\sigma(\xi_j)}$ désigne le sous-schéma formel de $\mathrm{Spf}\, K_\sigma[[U]] = \widehat{X}_{x_j,\sigma}$ défini par l'idéal $K_\sigma I_j = K\sigma(I_j)$. □

L'extension des scalaires de $\eta_{\mathbf{Q},D}$ à K est alors l'application K-linéaire :

$$\eta_D : E_{K,D} \to \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{\sigma:K_j\hookrightarrow K} \Gamma(\widehat{V}_{\sigma(\xi_j)}, L^D).$$

Pour $j \in \{1,\ldots,m\}$, rappelons que l'on a noté $d_j = [K_j : \mathbf{Q}]$ et notons également $\sigma_j^1,\ldots,\sigma_j^{d_j}$ les d_j plongements de K_j dans K.

Définissons une filtration décroissante sur $E_{\mathbf{Q},D}$ puis sur $E_{K,D}$. Tout d'abord définissons, pour tous nombres entiers naturels k, D, le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel

$$E^k_{\mathbf{Q},D} = \{s \in E_{\mathbf{Q},D} |\ s_{|(V_j)_{\omega_j(k)-1}} = 0 \text{ pour tout } j \in \{1,\ldots,m\}\},$$

et le K-espace vectoriel

$$\begin{aligned}E^k_{K,D} &= E^k_{\mathbf{Q},D} \otimes_{\mathbf{Q}} K \\ &= \bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{\sigma:K_j\hookrightarrow K} \{s \in E_D |\ s_{|(V_{\sigma(\xi_j)})_{\omega_j(k)-1}} = 0\}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Pour alléger les notations, nous n'écrirons plus l'indice K pour désigner ces K-espaces vectoriels. Ainsi, nous posons $E_D = E_{K,D}$ et, pour tout nombre entier naturel k, $E^k_D = E^k_{K,D}$.

Définissons également un raffinement de la filtration décroissante sur chaque $E_D = E_{\mathbf{Q},D} \otimes K$ déduite de celle de $E_{\mathbf{Q},D}$ par produit tensoriel,

$$E_D^k = E_D^{k,0} \supset \cdots \supset E_D^{k,d_{a_k}-1} \supset E_D^{k,d_{a_k}} = E_D^{k+1},$$

où, pour tout $l \in \{1, \ldots, d_{a_k} - 1\}$, $E_D^{k,l}$ est défini comme

$$E_D^{k,l} = \left\{ s \in E_D^{k,l-1} \mid s_{\left| \left(V_{\sigma_{a_k}^l(\xi_{a_k})} \right)_{n_k} \right.} = 0 \right\}.$$

Pour tout nombre entier naturel k et tout $l \in \{1, \ldots, d_{a_k}\}$, posons

$$\xi_{a_k}^l = \sigma_{a_k}^l(\xi_{a_k}). \tag{5.3}$$

Définissons le morphisme d'évaluation K-linéaire

$$\varphi_D^{k,l} : E_D^{k,l-1} \to \operatorname{Sym}^{n_k} \Omega^1_{\widehat{V}_{\xi_{a_k}^l}} \otimes L^D_{|\xi_{a_k}^l}.$$

L'espace d'arrivée $\operatorname{Sym}^{n_k} \Omega^1_{\widehat{V}_{\xi_{a_k}^l}} \otimes L^D_{|\xi_{a_k}^l}$ est un K-espace vectoriel de dimension 1. Le noyau de $\varphi_D^{k,l}$ est $E_D^{k,l}$; notons encore $\varphi_D^{k,l}$ l'application K-linéaire injective qui s'en déduit par passage au quotient :

$$\varphi_D^{k,l} : E_D^{k,l-1}/E_D^{k,l} \hookrightarrow \operatorname{Sym}^{n_k} \Omega^1_{\widehat{V}_{\xi_{a_k}^l}} \otimes L^D_{|\xi_{a_k}^l}. \tag{5.4}$$

Comme l'espace d'arrivée est de dimension 1, l'application $\varphi_D^{k,l}$ est un isomorphisme dès que $E_D^{k,l}$ est strictement inclus dans $E_D^{k,l}$.

5.3. Inégalité de pentes

Pour $k \in \mathbf{N}$ et $l \in \{1, \ldots, d_{a_k}\}$), les K-espaces vectoriels $E_D^{k,l}$ et $\operatorname{Sym}^k \Omega^1_{\widehat{V}_{\sigma_i^l(\xi_i)}}$ peuvent être munis de structures entières grâce au choix d'un modèle projectif de X sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$. Comme expliqué au paragraphe 3.3, on les munit de structures hermitiennes $(\overline{\mathscr{E}_D}, \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_i}})$, en choisissant comme norme sur les $E_D^{k,l} \otimes \mathbf{C}$ la norme de John associée à la norme-infini (voir page 20).

On obtient alors l'*inégalité de pentes* suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}_D}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_{a_k}} \operatorname{rg}(E_D^{k,l-1}/E_D^{k,l}) \Bigg[\widehat{\mu}_{\max} \Bigg(& \operatorname{Sym}^k \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_{\xi_{a_k}^l}} \otimes \mathscr{L}^D_{|\xi_{a_k}^l}} \Bigg) \\ & + h(\varphi_D^{k,l}) \Bigg]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

D'après le lemme 4.8, on a une majoration de la pente maximale intervenant dans cette inégalité. Il existe un nombre réel C_1 strictement positif tel que, pour tous nombres entiers naturels K, D, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\mathrm{Sym}^{\omega_i(k)}\,\overline{\Omega^1_{\widehat{V}_i}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^D_{|P_j}\right) \leqslant C_1(n_k + D) \leqslant C_1(k + D). \tag{5.6}$$

5.4. Majoration des hauteurs du morphisme d'évaluation

Dans la suite, nous faisons l'hypothèse suivante sur les vitesses de dérivation. On suppose qu'il existe des nombres réels strictement positifs $\beta_1, \ldots, \beta_m$ dont la somme vaut 1 tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, l'ordre d'annulation $\omega_i(k)$ le long de $\widehat{V}_i$ prescrit pour les éléments de E^k_D vérifie

$$\omega_i(k) \underset{k\to\infty}{=} \beta_i k + O(1). \tag{5.7}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ la suite $(k - \frac{\omega_i(k)}{\beta_i})_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée. Soit b un nombre entier naturel qui majore ces suites. On peut alors écrire, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\omega_i(k) = \beta_i(k - b) + r_i(k), \tag{5.8}$$

où $(r_i(k))_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de nombres entiers naturels.

Proposition 5.4. — *Soit λ un nombre réel strictement positif tel que*

$$\lambda\rho < 1. \tag{5.9}$$

Soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Il existe alors un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tous nombres entiers naturels k, D et tout $l \in \{1, \ldots, d_{a_k}\}$,

$$h(\varphi^{k,l}_D) \leqslant C(k + D) - d\,(\lambda - \overline{\alpha} d_{a_k}\beta_{a_k})\,k\log k + d\lambda k \log D.$$

Pour démontrer cette proposition qui contrôle la hauteur des morphismes d'évaluation $\varphi^{k,l}_D$, nous allons montrer deux lemmes : le lemme 5.5 qui fournit une majoration de la somme des hauteurs du morphisme d'évaluation en toutes places excepté un nombre fini, puis le lemme 5.6 qui donne une meilleure majoration en certaines places de K, grâce à l'uniformisation de $\widehat{V}$.

Lemme 5.5. — *Pour tout ensemble S de plongements de K dans $\mathbf{C}_{p_0}$, pour tout $\overline{\alpha} > \alpha$, il existe un nombre réel positif C tel que*

$$\sum_{p\leqslant\infty}\ \sum_{\substack{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C}_p,\\ \sigma\notin S}} h_\sigma(\varphi^{k,l}_D) \leqslant \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]n_k\log n_k + C(k + D),$$

pour tous $k \in \mathbf{N}$, $D \in \mathbf{N}^*$ et tout $l \in \{1, \ldots, d_{a_k}\}$.

Démonstration. — Soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Soient $k \in \mathbf{N}$ et $D \in \mathbf{N}^*$. Comme $\widehat{V}_{a_k}$ est α-arithmétique, pour tout plongement σ de K_{a_k} dans K le sous-schéma formel $\widehat{V}_{\sigma(\xi_{a_k})}$ est α-arithmétique (voir la définition 3.23). La norme du morphisme d'évaluation $\varphi_D^{k,l}$ défini (voir (5.4)) comme

$$\varphi_D^{k,l} : E_D^{k,l-1}/E_D^{k,l} \hookrightarrow \operatorname{Sym}^{n_k} \Omega^1_{\widehat{V}_{\xi^l_{a_k}}} \otimes L^D_{|\xi^l_{a_k}},$$

vérifie donc :

$$\sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\substack{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p, \\ \sigma \notin S}} h_\sigma(\varphi_D^{k,l}) \leqslant \overline{\alpha}[K : \mathbf{Q}] n_k \log n_k + C(k + D).$$

□

Par définition, pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}_{p_0}$, la hauteur de φ_D^k associée au plongement σ est $h_\sigma(\varphi_D^{k,l}) = \log \|\varphi_D^{k,l} \otimes_{K,\sigma} \mathbf{C}_{p_0}\|$.

Pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}_{p_0}$ tel que $\sigma(\xi^l_{a_k}) = \xi_{a_k}$ on obtient, grâce à l'uniformisation, une bonne majoration de la hauteur de $\varphi_D^{k,l}$ associée au plongement σ. C'est l'objet du lemme ci-dessous.

Lemme 5.6. — *Soit λ un nombre réel strictement positif tel que $\lambda\rho < 1$.*

Il existe un nombre réel C positif tel que, pour tous $k \in \mathbf{N}$, $D \in \mathbf{N}^*$ et tout $l \in \{1, \ldots, d_{a_k}\}$, pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}_{p_0}$ tel que $\sigma(\xi^l_{a_k}) = \xi_{a_k}$,

$$h_\sigma(\varphi_D^{k,l}) \leqslant C(k + D) - \lambda k \log \frac{k}{D}. \tag{5.10}$$

Démonstration du lemme 5.6. — Pour alléger les notations, on ne précisera pas en indice que les valeurs absolues et normes considérées sont celles à la place $\mathfrak{p}_0$.

Comme la famille de sous-schémas formels $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ admet une uniformisation d'ordre inférieur à $\rho > 0$ en p_0, il existe une courbe algébrique M projective, connexe et lisse sur $\mathbf{C}_{p_0}$, un ensemble fini $T \subset M$, une application holomorphe

$$\Theta : M \setminus T \to X(\mathbf{C}_{p_0}),$$

et des points distincts $w_1, \ldots, w_m$ de $M \setminus T$ tels que $\Theta(w_j) = \xi_j$ et le germe de courbe formelle paramétré par Θ au voisinage de ξ_j coïncide avec $\widehat{V}_j$ (*cf.* définition 4.5). L'uniformisation étant d'ordre inférieur à ρ, d'après la définition 4.1, il existe une section $\eta \in \Gamma(M \setminus T, \Theta^*(L^{-1}))$ non nulle et une famille $(\rho_\tau)_\tau$ de nombres réels positifs telles que, si u_τ est un paramètre local au voisinage de $\tau \in T$, il existe des nombres réels strictement positifs A_1, A_2 tels que

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2|u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}} \quad \text{pour tout } z \text{ suffisamment proche de } \tau, \tag{4.1}$$

et $\sum_{\tau\in T}\rho_\tau \leqslant \rho$. D'après le lemme 4.1, on peut supposer que η ne s'annule pas en $w_1, \dots, w_m$.

Lemme 5.7. — *Soit M une courbe algébrique projective lisse connexe sur un corps F algébriquement clos et soient $T, W \subset M(F)$ des ensembles finis disjoints. Notons g le genre de M. Pour tout $\tau \in T$ soit μ_t un nombre réel strictement positif. Supposons que $\sum_{\tau\in T}\mu_\tau < 1$. Pour tout $w \in W$, soit $\beta_w > 0$ tel que $\sum_{w\in W}\beta_w = 1$. Alors pour tout nombre entier a assez grand, il existe une fonction rationnelle R_a sur M, régulière sur $M \setminus W$ ayant un pôle d'ordre exactement $\lfloor a\beta_w\rfloor$ en $w \in W$ et un zéro d'ordre $m_\tau \geqslant \lceil a\mu_\tau\rceil$ en chaque $\tau \in T$.*

Démonstration. — Considérons le diviseur à coefficients réels Δ donné par

$$\Delta = \sum_{w\in W}\beta_w[w] - \sum_{\tau\in T}\mu_\tau[\tau].$$

Son degré, $\deg(\Delta) = \sum_{w\in W}\beta_w - \sum_{\tau\in T}\mu_\tau$, est strictement positif par hypothèse. Si D est un diviseur sur M, notons $h^0(D)$ la dimension sur F de l'espace des sections $H^0(M, \mathscr{O}_M(D))$. Si D est un diviseur à coefficients réels, $D = \sum \lambda_P[P]$, avec $\lambda_P \in \mathbf{R}$ pour tout P, on note $\lfloor D\rfloor$ le diviseur à coefficients entiers $D = \sum\lfloor\lambda_P\rfloor[P]$. Notons K_M le diviseur canonique de M. D'après le théorème de Riemann-Roch, pour tout nombre entier naturel a non nul, on a :

$$h^0(\lfloor a\Delta\rfloor) - h^0(K_M - \lfloor a\Delta\rfloor) = \deg(\lfloor a\Delta\rfloor) + 1 - g,$$

et, pour tout $w \in W$,

$$h^0(\lfloor a\Delta\rfloor - [w]) - h^0(K_M - \lfloor a\Delta\rfloor + [w]) = \deg(\lfloor a\Delta\rfloor) - g.$$

Lorsque a tend vers l'infini, $\deg(\lfloor a\Delta\rfloor) = a\deg(\Delta) + O(1)$, donc $\deg(\lfloor a\Delta\rfloor) \sim a\deg(\Delta)$ puisque $\deg(\Delta) > 0$. Prenons pour a un nombre entier assez grand tel que $\deg(\lfloor a\Delta\rfloor) \geqslant 2g$. Alors,

$$h^0(K_M - \lfloor a\Delta\rfloor) = h^0(K_M - \lfloor a\Delta\rfloor + [w]) = 0.$$

Par conséquent, les F-espaces vectoriels $H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor - [w]))$, pour $w \in W$, sont des hyperplans de $H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor))$. Comme le corps F est infini, il existe

$$R_a \in H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor)) \setminus \bigcup_{w\in W} H^0(M, \mathscr{O}(\lfloor a\Delta\rfloor - [w])).$$

La fonction rationnelle R_a a un pôle d'ordre exactement $\lfloor a\beta_w\rfloor$ en chaque $w \in W$, pas d'autre pôle, et a un zéro d'ordre au moins $\lceil a\mu_\tau\rceil$ en $\tau \in T$. $\square$

Soient donc a un nombre entier naturel, $(\mu_\tau)_{\tau\in T}$ une famille de nombres réels strictement positifs dont la somme est strictement inférieure à 1 et telle que, pour tout $\tau \in T$,

$$\mu_\tau \geqslant \lambda\rho_\tau. \tag{5.11}$$

C'est possible car on a supposé que λ est tel que $\lambda\rho < 1$. D'après le lemme 5.7, il existe alors une fonction rationnelle R_a sur M, régulière sur $M \setminus W$ ayant un pôle d'ordre exactement $\lfloor a\beta_{a_k}\rfloor$ en $w_1, \ldots, w_m$ et un zéro d'ordre $m_\tau \geqslant \lceil a\mu_\tau\rceil$ en chaque $\tau \in T$.

Soit $D \in \mathbf{N}$ et soit $s \in E_D$. Soit F_s la fonction holomorphe $\Theta^*(s)\eta^D$ sur $M \setminus T$. Soient $k \in \mathbf{N}$ et $l \in \{1, \ldots, d_{a_k}\}$ tels que $f \in E_D^{k,l}$. Alors F_s s'annule au moins à l'ordre $\omega_i(k)$ en w_i, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. L'image de la section s par le morphisme d'évaluation $\varphi_D^{k,l}$ est

$$\varphi_D^{k,l}(s) = c_k(\Theta_* \frac{\partial}{\partial z}(w_{a_k}))^{\otimes -n_k}\eta(w_{a_k})^{-D} \in \mathrm{Sym}^{n_k}(\Omega^1_{\widehat{V}_{\xi_{a_k}}}) \otimes L^D_{|\xi_{a_k}}, \tag{5.12}$$

où

$$c_k = \lim_{z\to w_{a_k}} \frac{\Theta^*(s)\eta^D(z)}{u_{a_k}(z)^{n_k}} = \lim_{z\to w_{a_k}} \frac{f(z)}{u_{a_k}(z)^{n_k}},$$

u_{a_k} désignant un paramètre local de la courbe M au voisinage de w_{a_k} et $n_k = \omega_{a_k}(k)$, pour tout nombre entier naturel k.

En posant $C_0 = \max(|\Theta_* \frac{\partial}{\partial z}(w_{a_k})|^{-1}, |\eta(w_{a_k})|)$, on a

$$|\varphi_D^{k,l}(s)| \leqslant C_0^{k+D}|c_k|. \tag{5.13}$$

Posons

$$\nu_{a_k} = an_k - (k-b)\lfloor a\beta_{a_k}\rfloor. \tag{5.14}$$

C'est un nombre entier naturel. En effet, c'est clairement le cas si $k < b$ et si $k \geqslant b$ on a :

$$\begin{aligned}\nu_{a_k} = an_k - (k-b)\lfloor a\beta_{a_k}\rfloor &= an_k - (k-b)a\beta_{a_k} + (k-b)(a\beta_{a_k} - \lfloor a\beta_{a_k}\rfloor)\\ &= ar_{a_k}(k) + (k-b)(a\beta_{a_k} - \lfloor a\beta_{a_k}\rfloor) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Puisque

$$c_k = \lim_{z\to w_{a_k}} \frac{f(z)}{u_{a_k}(z)^{n_k}},$$

on a

$$|c_k|^a = \lim_{z\to w_{a_k}} \left| f^a R_a^{k-b} u_{a_k}^{-\nu_a(k)}(z)\right| \lim_{z\to w_{a_k}} \left| R_a^{-1} u_{a_k}^{-\lfloor a\beta_{a_k}\rfloor}(z)\right|^{k-b}.$$

La fonction R_a a un pôle d'ordre exactement $\lfloor a\beta_j \rfloor$ en w_j. En posant $C_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \lim_{z\to w_j} \left|R_a(z)^{-1}u_j(z)^{-\lfloor a\beta_j\rfloor}\right|^{\frac{1}{a}}$, on a donc

$$|c_k| \leqslant C_1^{k-b}\left(\lim_{z\to w_{a_k}}\left|f^a R_a^{k-b} u_{a_k}^{-\nu_a(k)}(z)\right|\right)^{\frac{1}{a}}. \tag{5.15}$$

La fonction $(\Theta^*(s)\eta^D)^a R_a^{k-b}$ est holomorphe sur $M \setminus T$, d'après l'hypothèse (5.8) faite sur les ordres d'annulation de $\Theta^*(s)$ aux points $w_1, \dots, w_m$. Soit r un nombre réel strictement positif. Appliquons à cette fonction un principe du maximum sur le domaine $\{|R_a(z)| \geqslant r^a\}$. Si la place p_0 est archimédienne, il s'agit du principe du maximum usuel en analyse complexe. Si p_0 est une place ultramétrique, il est donné par la proposition 4.13. Si r est suffisamment petit, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $w_i \in \{|R_a(z)| \geqslant r^a\}$.

Il vient :

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to w_{a_k}}\left|(\Theta^*(s)\eta^D(z))^a R_a(z)^{k-b}\right| &\leqslant \max_{\{|R_a(z)|\geqslant r^a\}}\left|(\Theta^*(s)\eta^D(z))^a R_a(z)^{k-b}\right| \\
&\leqslant \max_{\{|R_a(z)|= r^a\}}\left|(\Theta^*(s)\eta^D(z))^a R_a(z)^{k-b}\right| \\
&\leqslant r^{a(k-b)}\max_{\{|R_a(z)|\geqslant r^a\}}\left|(\Theta^*(s)\ \eta^D(z))^a\right| \\
&\leqslant r^{a(k-b)}\|s\|_{\sigma,\infty}^a \max_{\{|R_a(z)|\geqslant r^a\}}|\eta(z)|^{Da}. \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

La section η est d'ordre au plus ρ_τ au voisinage de τ : par définition (voir (4.1)), pour tout paramètre local u_τ autour de τ, il existe des nombres réels strictement positifs A_1, A_2 tels que pour tout z suffisamment proche de τ,

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2|u_\tau(z)|^{-\rho_\tau}}.$$

La fonction R_a a un zéro d'ordre m_τ en $\tau \in T$, donc il existe un nombre réel $A_3 > 0$ tel que pour tout z suffisamment proche de τ, $|R_a(z)| \geqslant A_3|u_\tau(z)|^{m_\tau}$. Ainsi,

$$\|\eta(z)\| \leqslant A_1 e^{A_2 A_3^{\rho_\tau}|R_a(z)|^{-\frac{\rho_\tau}{m_\tau}}}.$$

Pour r suffisamment petit, on a donc

$$\max_{|R(z)|=r^a}\|\eta(z)\| \leqslant \max_{\tau\in T} A_1 \exp\left(A_4 r^{-a\frac{\rho_\tau}{\mu_\tau}}\right),$$

où $A_4 = A_2 \max_{\tau\in T} A_3^{\rho_\tau}$.

Rappelons que $m_\tau \geqslant \lceil a\mu_\tau\rceil \geqslant a\mu_\tau$. Par conséquent, pour $r \leqslant 1$ et $\tau \in T$, on a

$$r^{-\frac{\rho_\tau}{m_\tau}} \leqslant r^{-\frac{\rho_\tau}{a\mu_\tau}} \leqslant r^{-\frac{1}{\lambda a}},$$

où $\lambda = \min_\tau \frac{\mu_\tau}{\rho_\tau}$. Par suite, il existe $r_0 \in]0,1[$ tel que, pour tout r inférieur à r_0,

$$\max_{|R(z)|=r^a} \|\eta(z)\| \leqslant A_1 \exp\left(A_4 r^{-\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Avec cette majoration de la norme de la section η, l'inégalité (5.16) devient donc

$$\begin{aligned}\lim_{z\to w_{a_k}} \left|\left(\Theta^*(s)\eta^D(z)\right)^a R_a(z)^{k-b}\right| &\leqslant \max_{|R_a(z)|=r^a} |f^a R_a^{k-b}(z)| \\ &\leqslant r^{a(k-b)} A_1^{aD} \exp\left(A_4 a D r^{-\frac{1}{\lambda}}\right) \|s\|_{\sigma,\infty}^a. \end{aligned} \tag{5.17}$$

D'après l'inégalité (5.15),

$$\begin{aligned} |c_k|^a &\leqslant C_1^{ak}\left(\lim_{z\to w_{a_k}} \left|f^a R_a^{k-b} u_{a_k}^{-\nu_a(k)}(z)\right|\right) \\ &\leqslant C_1^{ak}\left(\max_{\substack{z\in\mathscr{D} \text{ et} \\ |u_{a_k}(z)|\leqslant B_1}} \left|f^a R_a^{k-b} u_{a_k}^{-\nu_a(k)}(z)\right|\right), \end{aligned} \tag{5.18}$$

où $\mathscr{D}$ désigne un voisinage de w_{a_k} sur lequel le paramètre local u_{a_k} est holomorphe, et B_1 est un nombre réel positif. En appliquant le principe du maximum à la fonction holomorphe $f^a R_a^{k-b} u_{a_k}^{-\nu_a(k)}$ sur le domaine

$$\{|u_{a_k}(z)| \leqslant B_1\} \cap \mathscr{D},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \max_{\substack{z\in\mathscr{D} \text{ et} \\ |u_{a_k}(z)|\leqslant B_1}} \left|f^a R_a^{k-b} u_{a_k}^{-\nu_a(k)}(z)\right| &= \max_{\substack{z\in\mathscr{D} \text{ et} \\ |u_{a_k}(z)|= B_1}} \left|f^a R_a^{k-b} u_{a_k}^{-\nu_a(k)}(z)\right| \\ &= B_1^{-\nu_a(k)} \max_{\substack{z\in\mathscr{D} \text{ et} \\ |u_{a_k}(z)|= B_1}} \left|f^a R_a^{k-b}(z)\right| \\ &\leqslant B_1^{-\nu_a(k)}\left(r^{(k-b)} A_1^D \exp\left(A_4 D r^{-\frac{1}{\lambda}}\right) \|s\|_{\sigma,\infty}\right)^a, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (5.17). On obtient donc la majoration suivante de c_k, d'après l'inégalité (5.18) :

$$|c_k| \leqslant C_1^k B_1^{\frac{-\nu_a(k)}{a}} r^{k-b} A_1^D e^{A_4 D r^{-\frac{1}{\lambda}}} \|s\|_{\sigma,\infty}.$$

Cette majoration de $|c_k|$ permet d'obtenir une majoration de la norme de l'image de s par le morphisme d'évaluation $\varphi_D^{k,l}$, d'après l'inégalité (5.13) :

$$\|\varphi_D^{k,l}(s)\|_\sigma \leqslant C_0^{k+D} C_1^k B_1^{\frac{-\nu_a(k)}{a}} r^{k-b} A_1^D e^{A_4 D r^{-\frac{1}{\lambda}}} \|s\|_{\sigma,\infty}.$$

Si σ est un plongement de K dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire si p_0 est une place archimédienne, comme la norme-infini de s est inférieure à la norme de John associée (voir (1.11)), on a

$$\|\varphi_D^{k,l}\|_\sigma \leqslant C_0^{k+D} C_1^k B_1^{\frac{-\nu_a(k)}{a}} r^{k-b} A_1^D e^{A_4 D r^{-\frac{1}{\lambda}}}.$$

Comme $\nu_a(k) = O(1)$, il existe un nombre réel $C_2 > 0$ tel que, pour $r \leqslant r_0$,

$$h_\sigma(\varphi_D^{k,l}) = \log \|\varphi_D^{k,l}\|_\sigma \leqslant C_2(k+D) + k \log r + A_4 D r^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

Posons

$$r = \min\left\{ r_0, \left(\frac{\lambda k}{A_4 D}\right)^{-\lambda} \right\}.$$

Si $r = \left(\frac{\lambda k}{C_3 D}\right)^{-\lambda}$, *i.e.* pour $\frac{k}{D} \geqslant \frac{A_4}{\lambda} r_0^{-\frac{1}{\lambda}}$,

$$\log \|\varphi_D^{k,l}\|_\sigma \leqslant C_2(k+D) - \lambda k \log\left(\frac{\lambda k}{A_4 D}\right) + \lambda k$$

$$\leqslant C_3(k+D) - \lambda k \log k + \lambda k \log D \tag{5.19}$$

$$\leqslant C_3(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D}, \tag{5.20}$$

où C_3 est un nombre réel strictement positif.

Si $r = r_0$, c'est-à-dire si $\frac{k}{D} \leqslant \frac{A_4}{\lambda} r_0^{-\frac{1}{\lambda}}$, alors la norme de $\varphi_D^{k,l}$ vérifie la majoration

$$\log \|\varphi_D^{k,l}\| \leqslant C_0(k+D),$$

valable en toute place par définition de la condition α-arithmétique.

Or $\log \frac{k}{D} \leqslant -\frac{1}{\lambda} \log r_0 + \log \frac{A_4}{\lambda}$, donc pour tout $C_4 > 0$,

$$\begin{aligned} C_4(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D} &\geqslant C_4(k+D) + k\left(\log r_0 - \lambda \log \frac{A_4}{\lambda}\right) \\ &\geqslant (C_4 + \log r_0 - \lambda \log \frac{A_4}{\lambda}) k + C_4 D. \end{aligned}$$

Posons $C_4 = \max(C_0, C_0 + \lambda \log \frac{A_4}{\lambda} - \log r_0)$. Alors,

$$h_\sigma(\varphi_D^{k,l}) \leqslant C_0(k+D) \leqslant C_4(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D}.$$

La majoration (5.20) est donc encore valable pour les petites valeurs de $\frac{k}{D}$, quitte à remplacer C_3 par C_4. Finalement, il existe un nombre réel $C > 0$ tel que pour tous nombres entiers k, D et tout nombre entier $l \in \{1, \ldots, d_{a_k}\}$,

$$h_\sigma(\varphi_D^{k,l}) \leqslant C(k+D) - \lambda k \log \frac{k}{D},$$

ce qui conclut la démonstration du lemme 5.6. $\square$

Démonstration de la proposition 5.4. — D'après la proposition 1.7, la hauteur du morphisme d'évaluation est donnée par la somme suivante :

$$\begin{aligned}
h(\varphi_D^{k,l}) &= \sum_{p\leqslant\infty}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C}_p} h_\sigma(\varphi_D^{k,l}) \\
&= \left(\sum_{p\neq p_0}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C}_p} h_\sigma(\varphi_D^{k,l})\right) \\
&\quad + \left(\sum_{\substack{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C}_{p_0}\\ \sigma\circ\sigma_{a_k}^l(\xi_{a_k})=\xi_{a_k}}} h_\sigma(\varphi_D^{k,l})\right) + \left(\sum_{\substack{\sigma:K\hookrightarrow\mathbf{C}_{p_0}\\ \sigma\circ\sigma_{a_k}^l(\xi_{a_k})\neq\xi_{a_k}}} h_\sigma(\varphi_D^{k,l})\right).
\end{aligned}$$

Soit σ un plongement de K dans $\mathbf{C}_{p_0}$. Si

$$\sigma(\sigma_{a_k}^l(\xi_{a_k})) = \xi_{a_k}, \tag{5.21}$$

on dispose de la majoration (5.10) de la hauteur du morphisme d'évaluation $\varphi_D^{k,l}$ associée au plongement σ grâce au lemme 5.6. La restriction d'un tel plongement σ à $\sigma_{a_k}^l(K_{a_k})$ est déterminée de manière unique. Pour k et l fixés, le nombre de plongements σ de K dans $\mathbf{C}_{p_0}$ vérifiant la condition (5.21) est égal au nombre de façons d'étendre un plongement de $\sigma_{a_k}^l(K_{a_k})$ dans $\mathbf{C}_{p_0}$ en un plongement de K dans $\mathbf{C}_{p_0}$, soit

$$[K:\sigma_{a_k}^l(K_{a_k})] = [K:K_{a_k}] = \frac{[K:\mathbf{Q}]}{d_{a_k}}.$$

Ainsi, en notant $d=[K:\mathbf{Q}]$,

$$\begin{aligned}
h(\varphi_D^{k,l}) &\leqslant C'(k+D) + \overline{\alpha} d n_k \log n_k + \frac{d}{d_{a_k}}(C(k+D) - \lambda k\log\frac{k}{D}) \\
&\leqslant (C' + \frac{dC}{d_{a_k}})(k+D) + \overline{\alpha} d n_k\log n_k - \frac{d}{d_{a_k}}\lambda k\log\frac{k}{D} \\
&\leqslant C_6(k+D) + \overline{\alpha} d\beta_{a_k} k\log k - \frac{d}{d_{a_k}}\lambda k\log k + \frac{d}{d_{a_k}}\lambda k\log D,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $C_6 = C' + \frac{dC}{\min_i d_i}$, car $n_k \leqslant k$. Ainsi,

$$\leqslant C_6(k+D) - \left(\frac{d\lambda}{d_{a_k}} - d\overline{\alpha}\beta_{a_k}\right)k\log k + \frac{d\lambda}{d_{a_k}}k\log D.$$

□

5.5. Démonstration du théorème principal

Pour démontrer le théorème 5.2, on peut supposer $r > 1$. Nous allons alors appliquer l'inégalité de pentes en utilisant les majorations des hauteurs des morphismes d'évaluation que nous venons de démontrer. D'après (5.5), l'inégalité de pentes s'écrit

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_{a_k}} \mathrm{rg}(E_D^{k,l-1}/E_D^{k,l}) \left(\widehat{\mu}_{\max} \left(\mathrm{Sym}^{n_k} \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_{\xi^l_{a_k}}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^D_{|\xi^l_{a_k}}} \right) + h(\varphi_D^{k,l}) \right).$$

D'après la majoration de la pente maximale intervenant dans cette inégalité (5.6) et d'après la majoration de la hauteur du morphisme d'évaluation donné par la proposition 5.4, on a donc

$$\begin{aligned} -C_1 D^{r+1} &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_{a_k}} \mathrm{rg}(E_D^{k,l-1}/E_D^{k,l}) \Big[C_6(k+D) - \left(\frac{d\lambda}{d_{a_k}} - d\overline{\alpha}\beta_{a_k} \right) k \log k \\ &\qquad\qquad + \frac{d\lambda}{d_{a_k}} k \log D \Big] \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{rg}(E_D^k/E_D^{k+1}) \Big[C_6(k+D) - (d\lambda - d\overline{\alpha} d_{a_k}\beta_{a_k})\, k \log k \\ &\qquad\qquad + d\lambda k \log D \Big], \end{aligned}$$

où C_6 est un nombre réel strictement positif.

Posons $A = d\lambda$ et $B = d\lambda - d\overline{\alpha} \max_k (d_{a_k}\beta_{a_k}) = d\lambda - d\overline{\alpha} \max_{1 \leqslant j \leqslant m}(d_j \beta_j)$. La proposition 4.14 s'applique à la suite $e_D^k = \mathrm{rg}(E_D^k)$ car

$$e_D^k - e_D^{k+1} = \mathrm{rg}(E_D^k/E_D^{k+1}) \leqslant d_{a_k} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i.$$

On a ainsi

$$(r-1) d\lambda \leqslant d\overline{\alpha} \max_j d_j \beta_j r,$$

c'est-à-dire

$$\lambda \leqslant \frac{r}{r-1} \overline{\alpha} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} (d_j \beta_j). \tag{5.22}$$

Si $\rho = 0$, alors on peut choisir λ aussi grand que l'on veut, et l'inégalité précédente apporte une contradiction.

Donc $\rho \neq 0$, et en faisant tendre λ vers $\frac{1}{\rho}$ par valeurs inférieures dans l'inégalité (4.23) et en faisant tendre $\overline{\alpha}$ vers α (par valeurs supérieures), on obtient :

$$1 \leqslant \alpha \frac{r}{r-1} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} (d_j \beta_j) \rho. \tag{5.23}$$

Il reste à choisir de manière optimale les paramètres β_j. On veut minimiser le $\max_{1\leqslant j\leqslant m} d_j\beta_j$, pour $\beta_j > 0$ et $\sum \beta_j = 1$. Ce minimum est au moins égal à $\left(\sum_i \frac{1}{d_i}\right)^{-1}$ car

$$1 = \sum \beta_i = \sum \beta_i d_i \frac{1}{d_i} \leqslant \max_i \beta_i d_i \sum_i \frac{1}{d_i}.$$

En posant

$$\beta_j = \frac{1}{d_j}\left(\sum_i \frac{1}{d_i}\right)^{-1}, \tag{5.24}$$

on a, pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$, $d_j\beta_j = \left(\sum_i \frac{1}{d_i}\right)^{-1}$. Avec ce choix, l'inégalité (5.23) devient donc

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i} \leqslant \frac{r}{r-1}\alpha\rho.$$

Pour terminer la preuve du théorème 5.2, il reste à montrer que, pour le choix (5.24) des β_j l'on peut construire une suite ω donnant les ordres d'annulation grâce auxquels on définit la filtration $E_D^{k,l}$ qui vérifie l'hypothèse

$$\omega_i(k) \underset{k\to\infty}{=} \beta_i k + O(1). \tag{5.7}$$

Lemme 5.8. — *Soit* $(\beta_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ *une famille de nombres rationnels strictement positifs telle que* $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$.

Alors il existe une application $\omega : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^m$, $k \mapsto \omega(k) = (\omega_1(k),\dots,\omega_m(k))$, *telle que*

1. $\omega(0) = (0,\dots,0)$ *;*
2. *pour tout* $k \in \mathbf{N}^*$, *pour tout* $i \in \{1,\dots,m\}$, $\omega_i(k) - \omega_i(k-1) \in \{0,1\}$ *;*
3. *pour tout* $k \in \mathbf{N}^*$, *il existe un unique* $a_k \in \{1,\dots,m\}$ *tel que*
$$\omega_{a_k}(k) = \omega_{a_k}(k-1) + 1;$$
4. *pour tout* $i \in \{1,\dots,m\}$,
$$\omega_i(k) \underset{k\to\infty}{=} \beta_i k + O(1).$$

Démonstration. — Soit δ un dénominateur commun des β_j, c'est-à-dire un nombre entier naturel non nul tel que pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$, $\delta\beta_j$ soit un nombre entier. Posons, pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$x_j = \delta\beta_j \in \mathbf{N}^*.$$

On a
$$\sum_{j=1}^{m} x_j = \delta.$$

On définit la suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ δ-périodique dont les δ premiers termes sont :
$$\underbrace{1,\ldots,1}_{x_1 \text{ fois}},\underbrace{2,\ldots,2}_{x_2 \text{ fois}},\ldots,\underbrace{m,\ldots,m}_{x_m \text{ fois}}.$$

Les points 1, 2 et 3 définissent alors une unique suite ω qui s'écrit alors :
(5.25)
$$\omega\left(j\delta+\sum_{n=1}^{c-1}x_n+l\right)=\Big((j+1)x_1,\ldots,(j+1)x_{c-1},jx_c+l,jx_{c+1},\ldots,jx_m\Big),$$

pour $j\in\mathbf{N}$, $c\in\{1,\ldots,m\}$ et $l\in\{1,\ldots,x_c\}$ (en considérant que la somme vide est nulle si $c=1$).

Soit $k\in\mathbf{N}^*$ et soit $j=\left\lfloor\frac{k}{\delta}\right\rfloor$. Alors $k-\delta<j\delta\leqslant k$, et pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$ on a :
$$\omega_i(k)\leqslant(j+1)x_i\leqslant\left(\left\lfloor\frac{k}{\delta}\right\rfloor+1\right)\beta_i\delta\leqslant\beta_i k+\beta_i\delta.$$

De plus,
$$\omega_i(k)\geqslant jx_i\geqslant\left\lfloor\frac{k}{\delta}\right\rfloor\beta_i\delta\geqslant\beta_i k-\beta_i\delta.$$

Ainsi, la suite $(\omega(k))_k$ vérifie le point 4 : pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$,
$$\omega_i(k)\underset{k\to\infty}{=}\beta_i k+O(1).$$

□

Rappelons ce que ce choix de suite ω signifie pour la filtration $(E_D^k)_{k,D\geqslant 0}$. À chaque cran de la filtration, on demande une annulation à un ordre de plus en l'un des points de la filtration par rapport au cran précédent. Comme expliqué au paragraphe 5.2, on code les ordres d'annulation par une suite (a_k), le k-ième terme a_k indiquant que l'on impose aux sections appartenant au $(k+1)$-ème cran de la filtration E_D^k de s'annuler à un ordre un de plus le long de $\widehat{V}_{a_k}$ qu'au cran E_D^{k-1}. On définit la filtration de la manière suivante : on dérive tout d'abord x_1 fois par rapport au premier point, puis x_2 fois par rapport au deuxième point, jusqu'à x_m fois par rapport au m-ième point, puis à nouveau x_1 fois par rapport au premier, *etc.*

5.6. Quelques remarques sur le théorème 5.2

Remarque. — Pour démontrer le théorème 5.2, nous avons eu besoin de dériver à des vitesses différentes en les différents points considérés : en chaque point, nous avons dérivé à une vitesse inversement proportionnelle à son degré. En dérivant aux mêmes vitesses en tous les points, c'est-à-dire en prenant tous les β_j égaux à $\frac{1}{m}$, on obtient d'après (5.23) l'inégalité plus faible suivante :

$$m \leqslant \alpha \frac{r}{r-1} \rho \max_{1 \leqslant j \leqslant m} d_j.$$

En reprenant les notations du début du chapitre, ν_d désignant, pour tout nombre entier naturel non nul d, le nombre de points w tels que le corps engendré par $f(w_1), \ldots, f(w_m)$ soit de degré d sur $\mathbf{Q}$, cette inégalité s'écrit :

$$\frac{\nu_1 + \cdots + \nu_d}{d} \leqslant \alpha \frac{r}{r-1} \rho, \tag{5.26}$$

pour tout $d \in \mathbf{N}^*$. Ce résultat est moins fort que celui du théorème 5.2, il n'implique notamment pas la convergence de la série $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\nu_d}{d}$: si tous les ν_d sont égaux, $\nu_d = \nu_1 \leqslant \alpha \frac{r}{r-1} \rho$, l'inégalité (5.26) est vérifiée, mais la série $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\nu_d}{d}$ diverge.

Remarque. — Dans l'énoncé du théorème 5.2, au lieu de supposer qu'il existe un nombre réel positif α tel que $\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m$ sont tous α-arithmétiques, on peut supposer qu'il existe des nombres réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ non nécessairement égaux tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\widehat{V}_i$ est α_i-arithmétique.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, soit $\overline{\alpha}_i$ un nombre rationnel tel que $\overline{\alpha}_i > \alpha_i$. Les calculs qui menaient à (5.23) donnent alors

$$1 \leqslant \frac{r}{r-1} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} (d_j \beta_j \overline{\alpha}_j),$$

où les β_j sont des nombres rationnels strictement positifs de somme 1. En posant

$$\beta_j = \frac{1}{d_j \overline{\alpha}_j} \left(\sum_i \frac{1}{d_i \overline{\alpha}_i} \right)^{-1},$$

et en faisant tendre, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\overline{\alpha}_i$ vers α_i, avec $\overline{\alpha}_i$ rationnel et strictement supérieur à α_i, on obtient alors comme conclusion :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i d_i} \leqslant \frac{r}{r-1} \rho.$$

5.7. Optimalité de la borne du théorème 5.2

Également dans l'article [Bertrand, 1977b], D. Bertrand a démontré une généralisation du théorème 5.1 cité au début de ce chapitre, sans hypothèse d'équation différentielle, avec des hypothèses arithmétiques portant sur les dérivées des fonctions méromorphes au voisinage des points considérés. I. Wakabayashi a démontré dans [Wakabayashi, 1985] que la borne donnée par ce théorème était optimale, de même que celle d'un théorème de Chudnovsky. Avant d'énoncer ces résultats, nous donnons la définition suivante d'un *bon point* pour des fonctions méromorphes, qui regroupe les hypothèses adaptées à ces théorèmes. Cette définition, utilisée par D. Bertrand, G. V. Chudnovsky et I. Wakabayashi, a été suggérée par D. Masser. Puis, nous faisons le lien entre ces conditions et celles de sous-schémas formels α-analytiques et α-arithmétiques définies au chapitre 3.

***Définition 5.9* (bon point).** — *Soit n nombre entier naturel non nul et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ et soit w un point de $\mathbf{C}$. Soient δ un nombre entier naturel non nul, δ', δ'' des nombres entiers naturels et μ un nombre réel strictement positif. On dit que w est un* bon point de $(f_1, \ldots, f_n)$ de type $(\delta, \delta', \delta'', \mu)$ *s'il existe un corps de nombres K tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *pour tout nombre entier naturel k, $f_i^{(k)}(w) \in K$,*
2. $$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log \overline{|f^{(k)}(w)|}}{k \log k} \leqslant \mu,$$
3. *pour tout $k \in \mathbf{N}$,*
$$\delta^{k+1}\left((\delta' k)!\right)^{\delta''} f^{(k)}(w) \in \mathfrak{o}_K.$$

La notation $\overline{|x|}$, pour un nombre algébrique x, désigne ici sa maison, *c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses conjugués.*

Comparons cette définition avec les hypothèses de nos théorèmes. Tout d'abord, l'analyticité des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ entraîne la condition 2 de la définition 5.9 avec $\mu = 1$.

Lemme 5.10. — *Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ et soient δ un nombre entier naturel non nul, δ', δ'' des nombres entiers naturels et μ un nombre réel strictement positif. Soit $w \in \mathbf{C}$ un bon point de $(f_1, \ldots, f_n)$ de type $(\delta, \delta', \delta'', \mu)$.*

Alors le germe de courbe paramétrée par $(f_1, \ldots, f_n)$ dans $\mathbf{C}^n$ au voisinage de $(f_1(w), \ldots, f_n(w))$ est $(1 + \delta'\delta'')$-arithmétique.

Démonstration. — Nous allons majorer la hauteur du morphisme d'évaluation associé aux fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_n$ grâce à l'hypothèse que $w \in \mathbf{C}$ est un bon point de $(f_1, \ldots, f_n)$ de type $(\delta, \delta', \delta'', \mu)$. D'après 3.14, pour toute place v de K,

$$h_v(\varphi_D^k) \leqslant C_v(k+D) + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \log \left| \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(w) \right|_v,$$

avec pour tout v, $C_v > 0$ et pour presque tout v, $C_v = 0$. D'après la condition 3. vérifiée par $f_1, \ldots, f_n$, on a donc, pour toute place v de k,

$$\begin{aligned} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) &\leqslant C_{\mathfrak{p}}(k+D) + \log \left(|k!^{-1}|_{\mathfrak{p}} |\delta^{-1}|_{\mathfrak{p}}{}^{k+1} |(\delta' k)!^{-1}|_{\mathfrak{p}}{}^{\delta''} \right) \\ &\leqslant C'_{\mathfrak{p}}(k+D) - \log |k!|_{\mathfrak{p}} - \delta'' \log |(\delta' k)!|_{\mathfrak{p}}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $C'_{\mathfrak{p}} = C_{\mathfrak{p}} + \log |\delta^{-1}|_{\mathfrak{p}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, \mathfrak{o}_K} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) &\leqslant (k+D) \sum_{\mathfrak{p}} C_{\mathfrak{p}} - \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, \mathfrak{o}_K} \left(\log |k!|_{\mathfrak{p}} + \delta'' \log |(\delta' k)!|_{\mathfrak{p}} \right) \\ &\leqslant (k+D)C + [K:\mathbf{Q}] \log(k!) + [K:\mathbf{Q}] \delta'' \log((\delta' k)!), \end{aligned}$$

d'après la formule du produit et en notant $C = \sum_{\mathfrak{p}} C_{\mathfrak{p}}$ (somme sur un nombre fini de termes non nuls). On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, \mathfrak{o}_K} h_{\mathfrak{p}}(\varphi_D^k) &\leqslant C(k+D) + [K:\mathbf{Q}] k \log k + [K:\mathbf{Q}] \delta'' \delta' k \log(\delta' k) \\ &\leqslant C'(k+D) + [K:\mathbf{Q}](1 + \delta' \delta'') k \log k, \end{aligned}$$

avec $C' = C + [K:\mathbf{Q}] \delta' \delta'' \log \delta'$. □

Lemme 5.11. — *Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ et soit w un point de $\mathbf{C}$. Soit α un nombre réel positif. Alors le germe de courbe paramétrée par $(f_1, \ldots, f_n)$ dans $\mathbf{C}^n$ au voisinage de $(f_1(w), \ldots, f_n(w))$ est α-analytique si et seulement s'il existe un nombre entier naturel non nul δ tel que w soit un bon point de $(f_1, \ldots, f_n)$ de type $(\delta, 1, \alpha - 1, 1)$.*

Nos définitions de sous-schéma formel α-arithmétique et α-arithmétique implique la condition 2. de la définition de bon point avec $\mu = 1$, mais ne tiennent pas compte du fait que μ pourrait être plus petit. Cela suggère une définition raffinée de ces notions, que nous n'avons pas développée dans cette thèse.

Avec les notations de la définition 5.9, les théorèmes de D. Bertrand et de G. V. Chudnovsky ([Bertrand, 1977b], théorème 2, [Choodnovsky, 1979], [Choodnovsky, 1978], voir aussi [Reyssat, 1977] pour une démonstration du théorème de Chudnovsky sans marches aléatoires) s'énoncent ainsi.

Théorème 5.12 **(Bertrand, 1977).** — *Soient f_1, f_2 deux fonctions méromorphes algébriquement indépendantes d'ordres de croissances respectifs ρ_1 et ρ_2. Alors*
$$\sum_w \frac{1}{d_w\delta'_w\delta''_w + 1 + (d_w - 1)\mu_w} \leqslant \rho_1 + \rho_2,$$
où la somme est prise sur tous les bons points w de $(f_1, \ldots, f_n)$, et pour un tel w, $\delta_w, \delta'_w, \delta''_w, \mu_w$ sont tels que w est un bon point de type $(\delta_w, \delta'_w, \delta''_w, \mu_w)$ et d_w le degré du corps de nombres $\mathbf{Q}(f_1(w), \ldots, f_n(w))$.

Théorème 5.13 **(Chudnovsky, 1978).** — *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, transcendante, d'ordre de croissance au plus ρ. Alors*
$$\sum_w \frac{1}{d_w\delta'_w\delta''_w + 1 + (d_w - 1)\mu_w} \leqslant \rho,$$
où la somme est prise sur tous les bons points $w \in \overline{\mathbf{Q}}$ de (f), et pour un tel w, $\delta_w, \delta'_w, \delta''_w, \mu_w$ sont tels que w est un bon point de type $(\delta_w, \delta'_w, \delta''_w, \mu_w)$ et d_w le degré du corps de nombres engendré par $f(w)$.

En appliquant le théorème 5.12 avec la fonction $f_1(z) = z$, on obtient le résultat suivant : pour toute fonction méromorphe transcendante f d'ordre inférieur à ρ,
$$\sum_w \frac{1}{d_w\delta'_w\delta''_w + 1 + (d_w - 1)\mu_w} \leqslant \rho,$$
où la somme est prise sur tous les bons points $w \in \overline{\mathbf{Q}}$ de $(z, f(z))$. Le théorème de Chudnovsky est un résultat plus fort, puisque l'énoncé demande seulement que chaque w soit un bon point pour (f) ; il ne requiert pas que w et les $f^{(k)}(w)$, pour $k \in \mathbf{N}$, soient dans un même corps de nombres, seulement que les $f^{(k)}(w)$, pour $k \in \mathbf{N}$, soient dans un même corps de nombres et que w soit simplement algébrique.

Le théorème ci-dessous, dû à I. Wakabayashi ([Wakabayashi, 1985], théorème 3) démontre que les bornes des théorèmes 5.12, 5.13 sont optimales.

Théorème 5.14 **(Wakabayashi, 1985).** — *Soient ρ un nombre réel strictement positif, $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une famille de nombres entiers naturels non nuls, $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une famille de nombres réels strictement positifs, $(\delta'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}, (\delta''_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux familles de nombres entiers naturels tels que*
$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{d_n\delta'_n\delta''_n + 1 + (d_n - 1)\mu_n} = \rho,$$
et, pour tout nombre entier naturel n non nul,
$$\mu_n \geqslant 1 - \frac{1}{\rho}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit K_n un corps de nombres de degré d_n. Alors il existe une fonction f entière sur $\mathbf{C}$, transcendante, d'ordre de croissance au plus ρ et il existe un nombre entier naturel non nul δ tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, n soit un bon point de (f) de type $(\delta, \delta'_n, \delta''_n, \mu_n)$.

D'après ce théorème, la conjecture de M. Waldschmidt (voir page 77) n'est donc pas vraie en toute généralité.

Récrivons ce théorème 5.14 en termes de sous-schémas formels α-analytiques, afin de voir plus clairement qu'il entraîne également l'optimalité de la borne du théorème 5.2 dans le cas de deux fonctions, c'est-à-dire dans le cas où la dimension de la variété X est $r = 2$.

Théorème 5.15. — *Soient ρ un nombre réel strictement positif, $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une famille de nombres entiers naturels non nuls et $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une famille de nombres réels positifs tels que*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{d_n \alpha_n} = \rho.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit K_n un corps de nombres de degré d_n. Alors il existe une fonction f entière sur $\mathbf{C}$, transcendante, d'ordre de croissance au plus ρ telle que, pour tout nombre entier naturel n, le sous-schéma formel paramétré par $(z, f(z))$ au voisinage du point $(n, f(n))$ soit α_n-analytique.

CHAPITRE 6

CAS DES PRODUITS CARTÉSIENS

E. Bombieri a démontré dans son article [Bombieri, 1970] un théorème de type Schneider-Lang en plusieurs variables (nous en avons rappelé l'énoncé dans l'introduction, théorème C). Cet énoncé affirme que l'ensemble des points en lesquels $d+1$ fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}_p^d$ prennent simultanément des valeurs dans un corps de nombres K est inclus dans une hypersurface, sous les conditions que ces fonctions méromorphes sont d'ordre de croissance fini et vérifient une équation différentielle polynomiale à coefficients dans ce corps de nombres.

Dans ce chapitre, nous démontrons une version en plusieurs variables du théorème de Schneider-Lang sur une courbe affine (théorème 4.6) exposé au chapitre 4. Les sous-schémas formels considérés sont de dimension d plus nécessairement égale à 1 et l'on suppose qu'ils admettent une uniformisation en une place finie par un produit d'ouverts de la droite affine. Pour établir le résultat principal de ce chapitre, le théorème 6.5, nous avons besoin d'une hypothèse restrictive supplémentaire : l'ensemble des points étudiés, donnés par l'uniformisation, forme un produit cartésien. Dans le cas complexe, cette hypothèse avait également été faite par S. Lang dans [Lang, 1966], chap IV, th.1 et E. Bombieri s'en est affranchi ensuite dans [Bombieri, 1970]. Elle simplifie considérablement la démonstration d'un *lemme de Schwarz*.

La démonstration du théorème 6.5, plus précisément la majoration du morphisme d'évaluation à la place privilégiée donnée par l'uniformisation, repose sur un *lemme de Schwarz* ultramétrique pour les produits cartésiens dans un produit d'ouverts de la droite affine. Dans le cas d'un produit cartésien de $\mathbf{C}_p^d$, un tel *lemme de Schwarz* a été démontré par P. Robba dans [Robba, 1978] (voir aussi l'article [Roy, 2002] de D. Roy qui généralise ce travail de P. Robba). La démonstration donnée dans le paragraphe 6.3 est une adaptation de la démonstration que M. Waldschmidt donne d'un *lemme de Schwarz* pour les produits cartésiens dans le cas complexe, dans son livre [Waldschmidt, 2000].

On peut démontrer un énoncé similaire à celui du lemme 6.14 puis du théorème 6.5 dans le cas complexe, c'est-à-dire pour un produit d'ouverts de la droite affine sur $\mathbf{C}$. Le théorème du type Schneider-Lang qu'on en déduit est alors un cas particulier (le cas particulier des produits cartésiens) de la généralisation du théorème d'E. Bombieri par C. Gasbarri ([Gasbarri, 2010]).

6.1. Uniformisation

Soit p un nombre premier et soient $T_1, \ldots, T_d$ des ensembles finis de $\mathbf{C}_p$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, soit $U_j = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus T_j$ et

$$U = U_1 \times \cdots \times U_d.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ et pour tout $t \in T_i$, soit $\rho_{(i,t)}$ un nombre réel strictement positif. À cette famille $\rho_{(i,t)}$, associons un diviseur effectif $\mathscr{T}$ à coefficients réels de support $T = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)^d \setminus U$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, notons π_i la projection du i-ème facteur de $\left(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)\right)^d$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$. Notons

$$A = \{(i,t), i \in \{1, \ldots, d\} \text{ et } t \in T_i\}.$$

Pour tout $\alpha = (i,t) \in A$, soit

$$\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}_{(i,t)} = \pi_i^{-1}(\{t\}).$$

On définit alors un diviseur $\mathscr{T}$ à coefficients réels, supporté par $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p))^d \setminus U$, comme

$$\mathscr{T} = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha [\mathscr{T}_\alpha].$$

Nous allons choisir une façon de « mesurer la distance » au diviseur $\mathscr{T}$. Pour cela, pour tout $\alpha = (i,t)$ fixons une fonction de Weil $\lambda_{\mathscr{T}_\alpha}$ associée au diviseur $\mathscr{T}_\alpha$. Une telle fonction est donnée par l'opposé du logarithme d'une norme d'une section méromorphe non nulle du fibré en droites $\mathscr{O}(\mathscr{T}_\alpha)$ défini par le diviseur $\mathscr{T}_\alpha$. Pour plus de détails sur les fonctions de Weil, nous renvoyons le lecteur au livre [Lang, 1997], chapitre IX paragraphe 1. Posons

$$\lambda_{\mathscr{T}}(z) = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \lambda_{\mathscr{T}_\alpha}(z).$$

Définition 6.1. — *Soient $T_1, \ldots, T_d$ des ensembles finis de $\mathbf{C}_p$ et soit U le produit cartésien $U = (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus T_1) \times \cdots \times (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus T_d)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ et tout $t \in T_i$, soit $\rho_{(i,t)}$ un nombre réel positif et soit $\mathscr{T}$ le diviseur associé défini ci-dessus. Soit η une section d'un fibré en droites métrisé* *sur U. On dit que η est* d'ordre de croissance inférieur à $\rho = (\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ *s'il existe des nombres réels A, B strictement positifs tels que*

$$\|\eta\| \leqslant A \exp(B \exp(\lambda_{\mathscr{T}})). \tag{6.1}$$

Remarque. — Cette définition ne dépend pas du choix de fonctions de Weil associées aux diviseurs $\mathscr{T}_\alpha$. En effet, pour tout $\alpha \in A$, soient λ_α et λ'_α deux fonctions de Weil associées au diviseur $\mathscr{T}_\alpha$ et soient

$$\lambda_{\mathscr{T}}(z) = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha \lambda_\alpha(z),$$

et

$$\lambda'_{\mathscr{T}}(z) = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha \lambda'_\alpha(z).$$

Si η est une section d'un fibré en droites métrisé tel que

$$\|\eta\| \leqslant A \exp(B \exp(\lambda_{\mathscr{T}})).$$

Soit $\alpha \in A$. Les fonctions λ_α et λ'_α diffèrent d'une fonction bornée. Il existe donc $C_\alpha \geqslant 0$ tel que $\lambda_\alpha(z) \leqslant C_\alpha + \lambda'_\alpha(z)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\eta(z)\| &\leqslant A \exp\left(B \exp\left(\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha \lambda_\alpha(z)\right)\right) \\
&\leqslant A \exp\left(B \exp\left(\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha (C_\alpha + \lambda'_\alpha(z))\right)\right) \\
&\leqslant A \exp\left(B' \exp\left(\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha \lambda'_\alpha(z)\right)\right),
\end{aligned}$$

en posant $B' = B \exp(\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha C_\alpha)$. La définition 6.1 ne dépend donc pas du choix des fonctions de Weil.

Soit X une variété projective sur un corps de nombres K, soit m un nombre entier naturel non nul. Soient $x_1, \dots, x_m$ des points K-rationnels de X et, pour tout nombre entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-schéma formel lisse de dimension d du complété formel $\widehat{X}_{x_j}$ de X en x_j.

***Définition 6.2* (Uniformisation)**. — *La famille de sous-schémas formels $(\widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_m)$ admet une* uniformisation à la place v_0 par une variété affine *s'il existe une variété affine connexe U sur $\mathbf{C}_{v_0}$, une application holomorphe*

$$\Theta : U \to X(\mathbf{C}_{v_0})$$

et un sous-ensemble fini $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ de U de cardinal m tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $\Theta(w_j) = x_j$ et le germe de courbe formelle paramétré par Θ au voisinage de x_j coïncide avec $\widehat{V}_j$.

***Définition 6.3* (Uniformisation cartésienne).** — *Soient $m_1, \ldots, m_d$ des nombres entiers naturels non nuls dont le produit $m_1 \ldots m_d$ est égal à m. La famille de sous-schémas formels $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ admet une* uniformisation cartésienne de type $(m_1, \ldots, m_d)$ à la place v_0 *si elle admet une uniformisation comme celle de la définition 6.2 telle que la variété U est un produit de d ouverts de la droite affine*

$$U = (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus T_1) \times \cdots \times (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus T_d),$$

où $T_1, \ldots, T_d$ sont des ensembles finis et l'ensemble de points W est un produit cartésien $W = W_1 \times \cdots \times W_d$ où, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, W_i est un sous-ensemble de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_{v_0}) \setminus T_i$ de cardinal m_i.

***Définition 6.4* (Uniformisation d'ordre $(\rho_1, \ldots, \rho_d)$)**

Soit L un fibré en droites ample, métrisé sur X et soit $(\rho_1, \ldots, \rho_d)$ une famille de nombres réels positifs. Avec les mêmes notations que dans la définition précédente, une uniformisation cartésienne

$$\Theta : \prod_{i=1}^{d} \big(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_{v_0}) \setminus T_i\big) \to X(\mathbf{C}_{v_0})$$

du sous-schéma formel $\widehat{V}$ à la place v_0 est d'ordre inférieur à $(\rho_1, \ldots, \rho_d)$ *s'il existe une section $\eta \in \Gamma(U, \Theta^*(L^{-1}))$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ et tout $t \in T_i$, il existe un nombre réel positif $\rho_{(i,t)}$ tels que*

- *pour tout $i \in \{1 \ldots, d\}$, $\sum_{t \in T_i} \rho_{(i,t)} \leqslant \rho_i$,*
- *la section η ne s'annule en aucun $w \in W$,*
- *la section η est d'ordre inférieur à $\rho = (\rho_{(i,t)})$, c'est-à-dire vérifie la condition de la définition 6.1 : il existe A, B des nombres réels strictement positifs tels que*

$$\|\eta\| \leqslant A \exp(B \exp(\lambda_{\mathscr{T}})), \tag{6.2}$$

où $\lambda_{\mathscr{T}}$ est une fonction de Weil pour le diviseur

$$\mathscr{T} = \sum_{\alpha=(i,t) \in A} \rho_{(i,t)} [\pi_i^{-1}(\{t\})].$$

Remarque. — Cette définition ne dépend pas du choix d'un fibré métrisé $\overline{L}$. En effet, soient $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ deux fibrés métrisés sur X, où L_1 et L_2 amples. Soit η une section de $\Theta^*(L_1^{-1})$ sur U qui ne s'annule en aucun $w \in W$ et telle que

$$\|\eta\| \leqslant A \exp(B \exp(\lambda_{\mathscr{T}})).$$

Montrons qu'il existe alors également une section non nulle de $\Theta^*(L_2^{-1})$ vérifiant ces deux conditions.

Comme L_1 est ample, on peut fixer un nombre entier naturel N non nul tel que le fibré $L_1^N \otimes L_2^{-1}$ admette une section globale f qui ne s'annule pas sur l'ensemble fini $\Theta(W)$. Alors, en posant $\eta' = \eta^N \Theta^* f \in \Gamma(U, \Theta^*(L_2^{-1}))$, la section η' ne s'annule pas sur W. De plus, sa norme vérifie :

$$\begin{aligned}\|\eta'(z)\| &= \|\eta^N(z)\| \|\Theta^* f(z)\| \\ &\leqslant A^N \exp(BN \exp(\lambda_{\mathscr{T}})) \|\Theta^* f(z)\|.\end{aligned}$$

La section f est de norme bornée sur X qui est projective, donc la section $\Theta^* f$ est de norme bornée sur U et il existe $A' > 0$ tel que

$$\|\eta(z)\| \leqslant A' \exp(BN \exp(\lambda_{\mathscr{T}}(z))).$$

6.2. Théorème de Schneider-Lang pour un produit cartésien

Théorème 6.5. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres K. Soient $d, m_1, \ldots, m_d$ des nombres entiers naturels non nuls et soit $m = m_1 \cdots m_d$. Soient $x_1, \ldots, x_m \in X(K)$ (non nécessairement distincts) et pour $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $\widehat{V}_j$ un sous-schéma formel lisse de dimension d du complété formel $\widehat{X}_{x_j}$ de X en x_j vérifiant les hypothèses suivantes :*

1. *Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\widehat{V}_j$ est α-arithmétique.*
2. *Il existe une place finie $\mathfrak{p}_0$ de K, il existe des nombres réels positifs $\rho_1, \ldots, \rho_d$ tels que la famille $(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_m)$ admette une uniformisation cartésienne de type $(m_1, \ldots, m_d)$ d'ordre inférieur à $(\rho_1, \ldots, \rho_d)$ à la place $\mathfrak{p}_0$ par un produit d'ouverts de la droite affine sur $\mathbf{C}_{\mathfrak{p}_0}$.*

Soit r la dimension de l'adhérence de Zariski de $\widehat{V} = \cup_{j=1}^m \widehat{V}_j$ dans X. Alors,
– ou bien $r > d$ et

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} \leqslant \alpha [K : \mathbf{Q}] \frac{dr}{r-d},$$

– ou bien $r = d$, c'est-à-dire les $\widehat{V}_j$ sont tous algébriques.

Remarque. — Contrairement à ce qui se passait dans le cas d'une seule variable, ce théorème ne donne pas une borne pour le nombre m de points rationnels, ni ne démontre la finitude de l'ensemble de ces points rationnels. En revanche, il fournit une borne sur le $\min_{1 \leqslant i \leqslant d} m_i$, donc, comme dans le théorème de Bombieri [Bombieri, 1970], sur le degré d'une hypersurface contenant ces points. En effet,

$$d\frac{\max_i \rho_i}{\min_i m_i} \geqslant \sum_{i=1}^{d} \frac{\rho_i}{m_i}$$

$$\frac{1}{d}\frac{\min_i m_i}{\max_i \rho_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1},$$

donc le théorème implique la majoration suivante sur le minimum des m_i :

$$\min_i m_i \leqslant d \max_i \rho_i \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} \leqslant \alpha[K:\mathbf{Q}] \max_i \rho_i \frac{d^2 r}{r-d}.$$

Démonstration du théorème 6.5. — Commençons par rappeler la construction des fibrés vectoriels hermitiens et des morphismes d'évaluation auxquels on va appliquer l'inégalité de pentes (*cf.* paragraphes 3.2 et 3.3).

Quitte à remplacer X par l'adhérence de $\widehat{V}$ dans X, on peut supposer que les sous-schémas formels $\widehat{V}_j$ sont Zariski denses dans X.

Pour tout nombre entier naturel k, pour tout $j \in \{1, \ldots, m_1 \cdots m_d\}$, notons $(V_j)_k$ le k-ième voisinage infinitésimal de x_j dans $\widehat{V}_j$. On a ainsi

$$\{x_j\} = (V_j)_0,$$

$$(V_j)_k \subset (V_j)_{k+1},$$

$$\widehat{V}_j = \varinjlim_k (V_j)_k.$$

Soit L un fibré en droites ample sur X. Définissons les K-espaces vectoriels et applications K-linéaires suivants, pour tous entiers naturel D, k :

$$E_D = \Gamma(X, L^{\otimes D}),$$

$$\begin{aligned} \eta_D : E_D &\to \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma(\widehat{V}_j, L^D) \\ s &\mapsto (s_{|\widehat{V}_1}, \ldots, s_{|\widehat{V}_m}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_D^k : E_D &\to \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma((V_j)_k, L^D) \\ s &\mapsto (s_{|(V_1)_k}, \ldots, s_{|(V_m)_k}). \end{aligned}$$

L'application η_D est injective car les sous-schémas formels $\widehat{V}_j$ sont denses. Les espaces vectoriels

$$E_D^k = \ker \eta_D^{k-1} = \{s \in \Gamma(X, L^{\otimes D}) \mid s_{|(V_1)_{k-1}} = \cdots = s_{|(V_m)_{k-1}} = 0\}$$

définissent une filtration de l'espace vectoriel E^D.

Le noyau de l'application de restriction

$$\bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma((V_j)_k, L^D) \to \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma((V_j)_{k-1}, L^D)$$

est isomorphe à $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L^D_{x_j}$. L'application η^k_D restreinte à E^k_D induit donc une application linéaire

$$\varphi^k_D : E^k_D \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L^D_{x_j}. \tag{6.3}$$

Par définition, le noyau de φ^k_D est égal à E^{k+1}_D.

Afin d'appliquer la *méthode des pentes*, on définit comme au chapitre 4 page 62 des structures entières et hermitiennes sur les K-espaces vectoriels E^k_D et $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k \left(\Omega^1_{\widehat{V}_j}\right) \otimes L^D_{x_j}$. On a alors l'*inégalité de pentes* suivante, où $h(\varphi^k_D)$ désigne la hauteur relativement à la norme-infini sur les sections dans E^k_D (voir (1.14) et (4.6)) :

(6.4)

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{rg}(E^k_D/E^{k+1}_D) \left(\widehat{\mu}_{\max} \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Sym}^k\, \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^D_{|P_j} \right) + h(\varphi^k_D) \right).$$

Lemme 6.6. — *Avec les mêmes notations que précédemment. Il existe un nombre réel $C_1 > 0$ tel que*

$$\widehat{\mu}_{\max} \left(\bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathrm{Sym}^k\, \overline{\Omega^1_{\widehat{V}_j}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^D_{|P_j} \right) \leqslant C_1(k + D).$$

Démonstration. — La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 4.8, dans laquelle on n'avait pas utilisé que les sous-schémas formels étaient de dimension 1. □

De plus, d'après une version très affaiblie du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique (1.13), il existe un nombre réel $C > 0$ tel que

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}_D) \geqslant -CD^{n+1}.$$

L'inégalité de pentes (6.4) s'écrit donc :

$$-CD^{n+1} \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \mathrm{rg}(E^k_D/E^{k+1}_D)(C_1(k + D) + h(\varphi^k_D)). \tag{6.5}$$

Pour démontrer le théorème, on va utiliser le critère de la proposition 4.14 sur la hauteur du morphisme d'évaluation. Les deux lemmes ci-dessous fournissent les majorations nécessaires. Le premier donne une majoration de la somme des normes du morphisme d'évaluation en toutes les places sauf la place privilégiée $\mathfrak{p}_0$, qui provient de la condition de α-arithméticité de $\widehat{V}$, voir définition 3.10, page 39. Le deuxième lemme est la majoration de la norme du morphisme d'évaluation à la place privilégiée $\mathfrak{p}_0$, grâce à l'uniformisation du sous-schéma formel $\widehat{V}$ en cette place ; elle repose sur un *lemme de Schwarz*, le lemme 6.8 qui se déduit du lemme 6.14 qui est un lemme de décomposition des fonctions méromorphes sur un produit cartésien et que nous démontrerons au paragraphe 6.3.

Lemme 6.7. — *Soit $\overline{\alpha} > \alpha$. Il existe un nombre réel positif C_0 tel que, pour tout nombre entier naturel k et tout nombre entier naturel D non nul,*

$$\sum_{\substack{v\in\Sigma_K,\\ v\neq\mathfrak{p}_0}} \log\|\varphi_D^k\|_v \leqslant \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]k\log k + C_0(k+D).$$

Démonstration. — Cette majoration provient directement du fait que les sous-schémas formels $\widehat{V}_1,\dots,\widehat{V}_m$ sont α-arithmétiques (voir (4.5)). □

Lemme 6.8. — *Soit $\mathfrak{p}_0$ la place en laquelle $(\widehat{V}_1,\dots,\widehat{V}_m)$ admet une uniformisation cartésienne de type $(m_1,\dots,m_d)$ d'ordre $(\rho_1,\dots,\rho_d)$. Il existe $C_0'>0$ tel que*

$$h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_0'(k+D) - \frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} k\log\frac{k}{D}.$$

Finissons la démonstration du théorème 6.5 en admettant pour l'instant le lemme 6.8. La démonstration de ce lemme repose sur les résultats exposés au paragraphe 6.3, nous le démontrerons à la fin du chapitre, au paragraphe 6.4.

D'après les deux lemmes ci-dessus, pour tout $\overline{\alpha} > \alpha$, il existe $C>0$ tel que, pour tous nombres entiers k, D, $D\geqslant 1$, la hauteur du morphisme d'évaluation φ_D^k vérifie la majoration suivante :

$$h(\varphi_D^k) \leqslant -\frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} k\log\frac{k}{D} + \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]k\log k + C(k+D). \tag{6.6}$$

Vérifions que la suite $(e_D^k)_{k\in\mathbf{N}} = (\mathrm{rg}(E_D^k))_{k\in\mathbf{N}}$ satisfait les hypothèses de la proposition 4.14, grâce aux encadrements des rangs des modules E_D^k et des rangs des quotients successifs de la filtration donnés par les lemmes suivants.

Lemme 6.9. — *Pour tout $k \in \mathbf{N}$,*

$$\operatorname{rg}(E_D^k/E_D^{k+1}) \leqslant m\binom{d+k-1}{k}. \tag{6.7}$$

Démonstration. — Ces inégalités découlent de l'injectivité de l'application

$$\varphi_D^k : E_D^k/E_D^{k+1} \to \bigoplus_{i=1}^m \operatorname{Sym}^k\left(\Omega^1_{\hat{V}_i}\right) \otimes L_{x_i}^D,$$

et du fait que la dimension du K-espace vectoriel $\operatorname{Sym}^k\left(\Omega^1_{\hat{V}_i}\right)$ est égale à $\binom{d+k-1}{k}$. □

Lemme 6.10. — *Soient k, d des nombres entiers naturels, $d \geqslant 1$. Alors*

$$\frac{k^{d-1}}{(d-1)!} \leqslant \binom{d+k-1}{k} \leqslant (k+1)^{d-1}. \tag{6.8}$$

Démonstration. — En minorant par k chacun des $d-1$ termes au numérateur du coefficient binomial

$$\binom{d+k-1}{k} = \frac{(k+d-1)\dots(k+1)}{(d-1)!},$$

on obtient la minoration souhaitée.

Pour tout nombre entier $\ell \geqslant 1$, on a $k+\ell \leqslant (k+1)\ell$, et donc

$$\binom{d+k-1}{k} = \prod_{\ell=1}^{d-1} \frac{k+d-\ell}{d-\ell} \leqslant \prod_{\ell=1}^{d-1}(k+1) \leqslant (k+1)^{d-1}.$$

□

D'après les lemmes 6.9 et 6.10, la suite (e_D^k) vérifie l'hypothèse 2 de la proposition 4.14. De plus, d'après (1.12), e_D^0 vérifie l'hypothèse 1.

D'après la proposition 4.14, appliquée à

$$A = \frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^d \frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1},$$

et

$$B = \frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^d \frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} - \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}],$$

(on a alors bien $A > 0$ et $B \leqslant A$), on a donc

$$(r-1)\frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^d \frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} \leqslant \overline{\alpha}[K:\mathbf{Q}]r.$$

En faisant tendre $\overline{\alpha}$ vers α, on a donc

$$(r-1)\frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} \leqslant \alpha[K:\mathbf{Q}]r. \tag{6.9}$$

ce qui conclut la démonstration du théorème 6.5.

□

6.3. Bonnes décompositions de fonctions méromorphes

Soit p un nombre premier et soient $T_1, \ldots, T_d$ des parties finies non vides de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, soit

$$U_j = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus T_j,$$

et

$$U = U_1 \times \cdots \times U_d \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)^d.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, supposons que le point à l'infini sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ n'appartient pas à T_j et choisissons une coordonnée affine z_j sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus \{\infty\}$.

Notons $\mathscr{A}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U et $\mathscr{O}(U)$ celui des fonctions régulières sur U.

Si P est une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$, on note $\mathrm{m}_P(w)$ la multiplicité d'un zéro w de P.

Définition 6.11. — *Soient $f \in \mathscr{A}(U)$, j tel que $1 \leqslant j \leqslant d$ et $t \in T_j$. On définit le degré de f en t par rapport à la j-ième variable $\deg_{j,t}(f) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ comme la borne inférieure des $k \in \mathbf{Z}$ tels que la fonction $z \mapsto (z_j - t)^k f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $U_1 \times \cdots \times (U_j \cup \{t\}) \times \cdots \times U_d$. Si cet ensemble est vide, on pose $\deg_{j,t} f = +\infty$.*

On a $\deg_{j,t} f = -\infty$ si et seulement si f est nulle.

***Définition 6.12* (presque semi-norme multiplicative)**

Une presque semi-norme multiplicative *sur un anneau A est une application s de A dans $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ dont la restriction à $s^{-1}(\mathbf{R}_+)$ vérifie les mêmes relations qu'une semi-norme multiplicative, c'est-à-dire*

- *$s(0) = 0$ et $s(1) = 1$,*
- *$s(xy) = s(x)s(y)$ pour tout $x, y \in A$ tels que $s(x), s(y) \neq \infty$,*
- *$s(x + y) \leqslant s(x) + s(y)$ pour tout $x, y \in A$ tels que $s(x), s(y) \neq \infty$.*

Si s vérifie de plus l'inégalité plus forte $s(x + y) \leqslant \max\{s(x), s(y)\}$ pour tous $x, y \in s^{-1}(\mathbf{R}_+)$ elle est dite ultramétrique.

La semi-norme *d'un endomorphisme Φ de A relativement à une presque semi-norme s est*

$$s(\Phi) = \sup_{\substack{x \in A \ tq \\ s(x), s(\Phi(x)) \neq \infty}} \frac{s(\Phi(x))}{s(x)}.$$

S'il existe $x \in A$ tel que $s(x) = 0$ et $s(\phi(x)) \neq 0$, $s(\Phi)$ est infinie.

Exemples. — 1. Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, pour tout $t \in T_j$, $\exp(\deg_{j,t})$ définit une presque semi-norme multiplicative ultramétrique sur $\mathscr{A}(U)$.

2. Les endomorphismes de $\mathscr{A}(U)$ d'évaluation en la dernière variable

$$f(z_1, \ldots, z_d) \mapsto f(z_1, \ldots, z_{d-1}, u),$$

avec $u \in U_d$, sont de semi-norme inférieure à 1 pour les presque semi-normes multiplicatives ci-dessus.

3. Donnons un autre exemple de presque semi-norme multiplicative. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ et tout $t \in T_i$, soit $r_{(i,t)}$ un nombre réel strictement positif. Notons r la famille des $r_{(i,t)}$, où i décrit $\{1, \ldots, d\}$ et $t \in T_i$. Pour tout $\tau = (t_1, \ldots, t_d) \in T$, définissons la fonction s_τ sur $\mathscr{A}(U)$ associée aux rayons $(r_{(1,t_1)}, \ldots, r_{(d,t_d)})$, donnée par :

$$s_\tau(g) = \sup_{\substack{|z_i - t_i| = r_{(i,t_i)}, \\ 1 \leqslant i \leqslant d}} |g(z)|, \tag{6.10}$$

pour tout $g \in \mathscr{A}(U)$. Alors s_τ est une semi-norme multiplicative sur $\mathscr{A}(U)$. De plus, si $\mathscr{D}_{j,r}$ désigne le domaine analytique

$$\mathscr{D}_{j,r} = \bigcap_{t_j \in T_j} \{z_j \in \mathbf{P}^1 \mid |z_j - t_j| \geqslant r_{(j,t_j)}\},$$

et $\mathscr{D}_r$ le produit cartésien des $\mathscr{D}_{j,r}$, $\mathscr{D}_r = \prod_{j=1}^d \mathscr{D}_{j,r}$, alors on a

$$\sup_{z \in \mathscr{D}_r} |g(z)| = \max_{\tau \in T} s_\tau(g). \tag{6.11}$$

***Définition 6.13* (bonne décomposition)**. — *Soient m et d deux nombres entiers vérifiant $1 \leqslant m \leqslant d$. Pour tout $j \in \{m, \ldots, d\}$, soit P_j une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$, soit T_j l'ensemble des pôles de P_j et soit W_j l'ensemble de ses racines. Soit $\tau \in T_m \times \cdots \times T_d$.*

Soient f un fonction de $\mathscr{A}(U)$. On appelle bonne décomposition de f relative à $(P_m, \ldots, P_n)$ et $\tau = (t_m, \ldots, t_d)$ *une famille $(f_0, f_m, \ldots, f_d)$ de fonctions de $\mathscr{A}(U)$ vérifiant les quatre conditions suivantes.*

1. *La fonction f s'écrit*

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{i=m}^{d} f_i(z) P_i(z_i),$$

2. *pour tout nombre entier j tel que $m \leqslant j \leqslant d$,*

$$\deg_{j,t}(f_0) \leqslant \max(0, \deg_{j,t}(P_j)) \text{ pour tout } t \in T_j,$$
$$\deg_{j,t_j}(f_0) \leqslant \max(0, \deg_{j,t_j}(P_j) - 1),$$

3. *pour tous nombres entiers ℓ, j tels que $m \leqslant j < \ell \leqslant d$,*

$$\deg_{\ell,t}(f_j) \leqslant \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell)) \text{ pour tout } t \in T_\ell,$$
$$\deg_{\ell,t_\ell}(f_j) \leqslant \max(0, \deg_{\ell,t_\ell}(P_\ell) - 1).$$

4. *Soit s une presque semi-norme multiplicative ultramétrique sur $\mathscr{A}(U)$, finie sur l'anneau $\mathscr{O}(U)$ des fonctions régulières sur U, telle que, pour tout $w_d \in W_d$ l'endomorphisme de $\mathscr{A}(U)$ donné par $h(z_1, \ldots, z_d) \mapsto h(z_1, \ldots, z_{d-1}, w_d)$ soit de semi-norme inférieure à 1. Alors*

$$s(f_0) \leqslant s(f),$$

et pour tout $j \in \{m, \ldots, d\}$,

$$s(f_j) \leqslant s(P_j)^{-1} s(f).$$

Lemme 6.14. — *Soient m et d deux nombres entiers vérifiant $1 \leqslant m \leqslant d$. Pour tout $j \in \{m, \ldots, d\}$, soit P_j une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$, soit T_j l'ensemble des pôles de P_j. Soit $\tau = (t_m, \ldots, t_d) \in T_m \times \cdots \times T_d$. Alors toute fonction $f \in \mathscr{A}(U)$ admet une bonne décomposition relative à $(P_m, \ldots, P_d)$ et $(t_m, \ldots, t_d)$.*

Démonstration du lemme 6.14. — Nous allons démontrer le lemme 6.14 par récurrence décroissante sur $m \in \{1, \ldots, d\}$.

Étape 1 : démonstration du cas $m = d$.

Démontrons les points 1, 2, 3 et 4 par récurrence sur $p_d = \sum_{t \in T_d} \deg_t P_d$.

Si $p_d = 0$, alors P_d est constante et $f_0 = 0, f_d = f P_d^{-1}$ conviennent.

Si $p_d = 1$, alors $T = \{t\}$, $W = \{w\}$ et P_d est de la forme $P_d = \frac{X-w}{X-t}$. Définissons

$$f_0(z_1, \ldots, z_d) = f(z_1, \ldots, z_{d-1}, w),$$

$$f_d(z_1, \ldots, z_d) = \frac{f(z_1, \ldots, z_d) - f(z_1, \ldots, z_{d-1}, w)}{P_d(z_d)}.$$

Alors f_0 et f_d sont dans $\mathscr{A}(U)$, et $s(f_0) \leqslant s(f)$ car f_0 est la restriction de f en $z_d = w$ et la norme relativement à la presque semi-norme s de la restriction est inférieure à 1 par hypothèse. De plus, $s(f_d) \leqslant s(f) s(P_d)^{-1}$ et $\deg_{d,t}(f_0) \leqslant 0 = \max(0, \deg_t(P_d) - 1)$.

Soit $p_d \geqslant 2$. Soit w une racine de P_d et posons $Q_d = P_d \frac{X-t_d}{X-w}$, on a $\sum_{t \in T_d} \deg_{d,t}(Q_d) = p_d - 1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, f admet une bonne décomposition relative à la fonction rationnelle Q_d,

$$f = g_0 + g_d Q_d, \tag{6.12}$$

où $g_0, g_d \in \mathscr{A}(U)$ et pour tout $t \in T_d$,

$$\deg_{d,t}(g_0) \leqslant \max(0, \deg_t(Q_d)). \tag{6.13}$$

Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence à la fonction g_d : celle-ci admet une bonne décomposition relativement à la fraction rationnelle $\frac{z-w}{z-t_d}$ et à t_d. Il existe $h_0, h_d \in \mathscr{A}(U)$ telles que

$$g_d(z) = h_0(z) + f_d(z) \frac{z_d - w}{z_d - t_d}, \tag{6.14}$$

et $\deg_{d,t}(h_0) \leqslant 0$ pour tout $t \in T_d$.

D'après les décompositions (6.12) et (6.14) de f et g_d,

$$\begin{aligned} f(z) &= g_0(z) + h_0(z) Q_d(z_d) + f_d(z) P_d(z_d) \\ &= f_0(z) + f_d(z) P_d(z_d), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$f_0(z) = g_0(z) + h_0(z) Q_d(z_d). \tag{6.15}$$

La fonction $f_0 \in \mathscr{A}(U)$ vérifie donc, d'après l'inégalité (6.13),

$$\deg_{d,t}(f_0) \leqslant \max(\deg_{d,t}(g_0), \deg_{d,t}(h_0) + \deg_t(Q_d)) \leqslant \max(0, \deg_t(Q_d)).$$

Or, pour tout $t \in T_d$,

$$\deg_t(Q_d) = \deg_t\left(\frac{X - t_d}{X - w} P_d\right) = \begin{cases} \deg_t(P_d) & \text{si } t \neq t_d \\ \deg_t(P_d) - 1 & \text{si } t = t_d, \end{cases} \tag{6.16}$$

donc $\deg_{d,t}(f) \leqslant \begin{cases} \max(0, \deg_t(P_d)) & \\ \max(0, \deg_t(P_d) - 1) & \text{si } t = t_d. \end{cases}$

Démontrons maintenant le point 4. Soit s une presque semi-norme multiplicative ultramétrique sur $\mathscr{A}(U)$ vérifiant les hypothèses du point 4. D'après la définition en (6.15) de f_0,

$$s(f_0) \leqslant \max(s(g_0), s(h_0) s(Q_d)).$$

Par hypothèse de récurrence, $s(g_0) \leqslant s(f)$, $s(h_0) \leqslant s(g_d)$ et $s(g_d) \leqslant s(f) s(Q_d)^{-1}$, d'où

$$s(f_0) \leqslant \max(s(f), s(g_d) s(Q_d)) \leqslant s(f).$$

De plus, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} s(f_d) &\leqslant s(g_d) s\left(\frac{z_d - w}{z_d - t_d}\right)^{-1} \\ &\leqslant s(f) s(Q_d)^{-1} s\left(\frac{z_d - w}{z_d - t_d}\right)^{-1} \\ &\leqslant s(f) s\left(P_d \frac{z_d - t_d}{z_d - w}\right)^{-1} s\left(\frac{z_d - w}{z_d - t_d}\right)^{-1} \\ &\leqslant s(f) s(P_d)^{-1}. \end{aligned}$$

Le lemme 6.14 est donc démontré dans le cas $m = d$.

Étape 2. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $1 \leqslant m < d$, supposons le lemme vrai au rang $m+1$.

Démontrons 1, 2 et 3. Soit $f \in \mathscr{A}(U)$. En utilisant le cas $m = d$ démontré à l'étape 1, écrivons une bonne décomposition de f relativement à (P_m) et (t_m),

$$f(z) = \varphi(z) + \theta(z) P_m(z_m), \tag{6.17}$$

où φ, θ sont dans $\mathscr{A}(U)$ et

$$\begin{aligned} \deg_{m,t}(\varphi) &\leqslant \max(0, \deg_{m,t}(P_m)) \text{ pour tout } t \in T_m, \\ \deg_{m,t_j}(\varphi) &\leqslant \max(0, \deg_{m,t_m}(P_m) - 1). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, φ et θ admettent de bonnes décompositions relativement à $(P_{m+1}, \ldots, P_d)$ et $(t_{m+1}, \ldots, t_d)$:

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{j=m+1}^{d} \varphi_j(z) P_j(z_j), \tag{6.18}$$

$$\theta(z) = \theta_0(z) + \sum_{j=m+1}^{d} \theta_j(z) P_j(z_j), \tag{6.19}$$

où $\varphi_0, \theta_0, \varphi_j, \theta_j \in \mathscr{A}(U)$ et pour tout $\ell \in \{m+1, \ldots, d\}$,

$$\begin{aligned} \deg_{\ell,t}(\theta_0), \deg_{\ell,t}(\varphi_0) &\leqslant \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell)) \text{ pour tout } t \in T_\ell, \\ \deg_{\ell,t_\ell}(\theta_0), \deg_{\ell,t_\ell}(\varphi_0) &\leqslant \max(0, \deg_{\ell,t_\ell}(P_\ell) - 1), \end{aligned}$$

et pour tout $j \in \{m+1, \ldots, n-1\}$, pour tout $\ell \in \{j+1, \ldots, d\}$,

$$\begin{aligned} \deg_{\ell,t}(f_j) &\leqslant \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell)) \text{ pour tout } t \in T_\ell, \\ \deg_{\ell,t_\ell}(f_j) &\leqslant \max(0, \deg_{\ell,t_\ell}(P_\ell) - 1). \end{aligned}$$

On a donc, d'après les décompositions (6.17), (6.18) et (6.19),

$$f(z) = \varphi_0(z) + \theta_0(z)P_m(z_m) + \sum_{j=m+1}^{d} \Big(\varphi_j(z) + \theta_j(z)P_m(z_m)\Big)P_j(z_j).$$

En posant

$$f_0 = \varphi_0, \quad f_m = \theta_0,$$

et, pour tout nombre entier j tel que $m+1 \leqslant j \leqslant d$,

$$f_j(z) = \varphi_j(z) + \theta_j(z)P_m(z_m), \tag{6.20}$$

on obtient la décomposition de f suivante :

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{j=m}^{d} f_j(z)P_j(z_j).$$

Montrons que c'est une bonne décomposition relativement à $(P_m, \dots, P_d)$ et $(t_m, \dots, t_d)$. Nous savons déjà que $f_0 = \varphi_0$ vérifie $\deg_{\ell,t}(\varphi_0) \leqslant \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell))$ pour tout $t \in T_\ell$ et $\deg_{\ell,t_\ell}(\theta_0), \deg_{\ell,t_\ell}(\varphi_0) \leqslant \max(0, \deg_{\ell,t_\ell}(P_\ell) - 1)$, pour tout nombre entier ℓ tel que $m+1 \leqslant \ell \leqslant d$. De plus, pour tout $t \in T_m$, par hypothèse de récurrence (point 4 au rang $m+1$, avec $s = \exp(\deg_{m,t})$), on a aussi

$$\deg_{m,t}(\varphi_0) \leqslant \deg_{m,t}(\varphi) \leqslant \begin{cases} \max(0, \deg_{m,t}(P_m) - 1) & \text{si } t = t_m \\ \max(0, \deg_{m,t}(P_m)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, pour tout ℓ tel que $m+1 \leqslant \ell \leqslant d$ et tout $t \in T_\ell$, la fonction $f_m = \theta_0$ vérifie $\deg_{\ell,t}(f_m) \leqslant \begin{cases} \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell) - 1) & \text{si } t = t_\ell \\ \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell)) & \text{sinon.} \end{cases}$

Soient j, ℓ des nombres entiers naturels vérifiant $m+1 \leqslant \ell < j \leqslant d$. Alors la fonction $f_j(z) = \varphi_j(z) + \theta_j(z)P_m(z_m)$ vérifie, pour tout $t \in T_\ell$,

$$\begin{aligned} \deg_{\ell,t}(f_j) &\leqslant \max(\deg_{\ell,t}(\varphi_j), \deg_{\ell,t}(\theta_j) + \deg_{\ell,t}(P_m)) \\ &\leqslant \max(\deg_{\ell,t}(\varphi_j), \deg_{\ell,t}(\theta_j)) \qquad \text{car } \ell \neq m \\ &\leqslant \begin{cases} \max(\max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell - 1)), \max(0, \deg_{\ell,t(}\, P_\ell) - 1)) & \text{si } t = t_\ell \\ \max(\max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell)), \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell))) & \text{sinon,} \end{cases} \\ &\leqslant \begin{cases} \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell) - 1) & \text{si } t = t_\ell \\ \max(0, \deg_{\ell,t}(P_\ell)) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrons maintenant le point 4. Soit s une presque semi-norme multiplicative ultramétrique sur $\mathscr{A}(U)$ telle que, pour tout $w_d \in W_d$ l'endomorphisme de $\mathscr{A}(U)$ donné par $h(z_1, \dots, z_d) \mapsto h(z_1, \dots, z_{d-1}, w_d)$ soit de norme inférieure à 1 et telle que, pour toute fonction P régulière sur $\mathscr{A}(U)$, $s(P) \neq \infty$.

Les fonctions φ_j et θ_j des décompositions de φ et θ suivantes

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{j=m+1}^{d} \varphi_j(z)P_j(z_j),$$

$$\theta(z) = \theta_0(z) + \sum_{j=m+1}^{d} \theta_j(z)P_j(z_j),$$

vérifient, par hypothèse de récurrence (point 4 au rang $m+1$),

$$\begin{array}{lclcl} s(\varphi_0) & \leqslant & s(\varphi) & \leqslant & s(f), \\ s(\theta_0) & \leqslant & s(\theta) & \leqslant & s(P_m)^{-1}s(f), \\ s(\varphi_j) & \leqslant & s(P_j)^{-1}s(\varphi) & \leqslant & s(P_j)^{-1}s(f), \\ s(\theta_j) & \leqslant & s(P_j)^{-1}s(\theta) & \leqslant & s(P_jP_m)^{-1}s(f), \end{array}$$

pour tout $j \in \{m+1,\dots d\}$. Les fonctions $f_0 = \varphi_0$ et $f_m = \theta_0$ vérifient donc bien

$$s(f_0) \leqslant s(f),$$

et

$$s(f_m) \leqslant s(P_m)^{-1}s(f).$$

De plus, pour tout j tel que $m+1 \leqslant j \leqslant d$, comme la fonction f_j est définie par $f_j(z) = \varphi_j(z) + \theta_j(z)P_m(z_m)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} s(f_j) & \leqslant & \max(s(\varphi_j), s(\theta_j)s(P_m)) \\ & \leqslant & s(P_j)^{-1}s(f). \end{array}$$

□

***Définition 6.15* (idéal $\mathscr{I}$).** — *Soient m, n deux nombres entiers naturels tels que $1 \leqslant m \leqslant d$. Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathscr{A}(U)$ formé des fonctions g telles que, pour tout $(z_1,\dots,z_{m-1}) \in U_1 \times \cdots \times U_{m-1}$, pour tout $j \in \{m,\dots,n\}$, pour tout $(w_m,\dots,w_n) \in W_m \times \cdots \times W_{j-1} \times W_{j+1} \times \dots W_n$, la fonction de $\mathscr{A}(U_j)$*

$$z \mapsto g(z_1,\dots,z_{m-1},w_m,\dots,w_{j-1},z,w_{j+1}\dots,w_n)$$

s'annule à l'ordre au moins m_{P_j} en $z = w_j$.

Rappelons que pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$, le point à l'infini sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ n'appartient pas à T_j et que z_j est une coordonnée affine sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \setminus \{\infty\}$. Pour tout multi-indice $I = (i_1,\dots,i_d) \in \mathbf{N}^d$, on note D^I l'opérateur différentiel $D_1^{i_1}\dots D_d^{i_d}$, où D_i est la dérivation par rapport à la i-ème variable z_i sur $\mathscr{A}(U)$. La longueur de I est notée $|I| = \sum_{j=1}^{d} i_j$.

Une fonction $g \in \mathscr{A}(U)$ est dans $\mathscr{I}$ si et seulement si pour tout $(w_m, \dots, w_d) \in W_m \times \cdots \times W_d$, pour tout $I = (0, \dots, 0, i_m, \dots, i_d) \in \mathbf{N}^d$ avec $i_j < m_{P_j}(w_j)$ et tout $(z_1, \dots, z_{m-1}) \in U_1 \times \cdots \times U_{m-1}$,

$$D^I g(z_1, \dots, z_{m-1}, w_m, \dots, w_d) = 0.$$

Lemme 6.16. — *Soient m, n deux nombres entiers naturels tels que $1 \leqslant m \leqslant d$. Soit $f \in \mathscr{I}$ telle que, pour tout $j \in \{m, \dots, d\}$,*
– *pour tout $t \in T_j$, $deg_{j,t}(f) \leqslant \max(0, \deg_{j,t}(P_j))$,*
– *et il existe $t_j \in T_j$ tel que $\deg_{j,t_j}(f) \leqslant \max(0, \deg_{j,t_j}(P_j) - 1)$.*
Alors $f = 0$.

Démonstration. — Démontrons ce lemme par récurrence sur d. Si $d = 1$, f s'annule à l'ordre au moins $m_{P_1}(w)$ en tout $w \in W_1$, et pour tout $t \in T_1$,

$$\deg_{1,t}(f) \leqslant \max(0, \deg_{1,t}(P_1))$$

et il existe $t_1 \in T_1$ tel que

$$\deg_{1,t_1}(f) \leqslant \max(0, \deg_{1,t_1}(P_1) - 1).$$

La fonction f a donc au moins $\sum_{w \in W_1} m_{P_1}(w)$ zéros et au plus

$$\left(\sum_{t \in T_1} \max(0, \deg_{1,t}(P_1)) \right) - 1$$

pôles, comptés avec multiplicités. Or $\sum_{w \in W_1} m_{P_1}(w) = \sum_{t \in T_1} \deg_{1,t}(P_1)$, donc f a strictement plus de zéros que de pôles, donc f est nulle.

Soit $d \geqslant 2$. Supposons le lemme vrai au rang $d - 1$. Soit $(z_1, \dots, z_{m-1}) \in U_1 \times \cdots \times U_{m-1}$ et soit $J = (0, \dots, 0, j_{m+1}, \dots, j_d)$ où $j_k < p_k$ pour tout $k \in \{m+1, \dots, d\}$. Posons

$$Q := X \mapsto D^J f(z_1, \dots, z_{m-1}, X, w_{m+1}, \dots, w_d).$$

Alors Q est une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ qui n'a pas de pôles en dehors de T_m et s'annule à l'ordre au moins $m_{P_m}(w_m)$ en tout $w_m \in W_m$ d'après l'hypothèse d'annulation. Écrivons $Q = P_m R$, avec R rationnelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ sans pôles en dehors de T_m. Montrons que R n'a pas de pôles. Pour tout $t \in T_m$,

$$\begin{aligned} \deg_{m,t}(Q) &\leqslant \deg_{m,t}(f) \\ &\leqslant \begin{cases} \max(0, \deg_{m,t_m}(P_m) - 1)) & \text{si } t = t_m \\ \max(0, \deg_{m,t}(P_m)) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\deg_{m,t}(R) &= \deg_{m,t}(Q) - \deg_{m,t}(P_m)\\ &\leqslant \begin{cases} -1 & \text{si } t = t_m\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

La fonction R est donc sans pôles et a un zéro d'ordre au moins 1 en t_m. Par conséquent, $R = 0$ et donc $Q = 0$.

Supposons f non nulle. Alors il existe $t \in T_m$ tel que $\deg_{m,t}(f) \neq -\infty$. Soit $\tau_m \in T_m$. Soit

$$\varphi(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_{m+1}, \ldots, z_d) = \lim_{z_m \to t} (z_m - t)^{\deg_t(f)} f(z).$$

Par définition de deg, $\varphi \neq 0$. Pour tout $I = (0, \ldots, 0, i_{m+1}, \ldots, i_d) \in \mathbf{N}^{d-1}$ tel que $i_j < m_{P_j}(w_j)$ la fonction φ vérifie

$$D^I(\varphi)(z_1, \ldots, z_{m-1}, w_{m+1}, \ldots, w_d) = 0,$$

pour tous $(z_1, \ldots, z_{m-1}) \in U_1 \times \cdots \times U_{m-1}$ et $(w_{m+1}, \ldots, w_d) \in W_{m+1} \times \cdots \times W_d$. De plus, pour tout $j \in \{m+1, \ldots, d\}$ et tout $t \in T_j$, $\deg_{j,t}(\varphi) = \deg_{j,t}(f)$ donc la fonction φ, entière sur $U_1 \times \cdots \times U_{m-1} \times U_{m+1} \times \cdots \times U_d$, vérifie les hypothèses du lemme 6.16 en $d-1$ variables. Par hypothèse de récurrence, φ est nulle, donc $f = 0$. □

Corollaire 6.17. — *Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, soit P_j une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$. Soit W_j l'ensemble de ses zéros, T_j l'ensemble de ses pôles.*

Alors pour tout $(t_1, \ldots, t_d) \in T_1 \times \cdots \times T_d$, toute fonction $f \in \mathscr{I}$ admet une bonne décomposition $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ relativement à $(P_1, \ldots, P_d)$ et $(t_1, \ldots, t_d)$ avec $f_0 = 0$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que les fonctions rationnelles $P_1, \ldots, P_d$ appartiennent à l'idéal $\mathscr{I}$. Soit $(t_1, \ldots, t_d) \in T_1 \times \cdots \times T_d$. D'après le lemme 6.14, f admet une bonne décomposition relativement à $(P_1, \ldots, P_d)$ et $(t_1, \ldots, t_d)$,

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{j=1}^{d} f_j(z) P_j(z_j).$$

Comme $f \in \mathscr{I}$, $f_0 = f - \sum_{j=1}^d f_j P_j$ est également dans l'idéal $\mathscr{I}$. La fonction f_0 vérifie donc les hypothèses du lemme 6.16 et donc, d'après ce lemme, $f_0 = 0$. □

6.4. Majoration de la hauteur du morphisme d'évaluation à la place privilégiée

Pour terminer la démonstration du théorème 6.5, il reste à démontrer le lemme 6.8, qui fournit une majoration de la hauteur des morphismes d'évaluation à la place privilégiée donnée par l'uniformisation.

D'après la définition 6.3 d'*uniformisation*, il existe une section η de $\Theta^*(L^{-1})$ sur U, qui ne s'annule pas sur W et dont la norme vérifie

$$\|\eta(z)\| \leqslant A \exp\Big(B \exp(\lambda_{\mathscr{T}}(z))\Big), \tag{6.21}$$

où A, B sont des nombres réels strictement positifs.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$, soit $t \in T_i$ et soit $\alpha = (i,t)$. Comme fonction de Weil, choisissons

$$\lambda_{\mathscr{T}_\alpha(z)} = -\log |z_i - t|.$$

Alors

$$\lambda_{\mathscr{T}}(z) = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \lambda_{\mathscr{T}_\alpha}(z) = \log \left(\prod_{\alpha=(i,t)\in A} |z_i - t|^{-\rho_\alpha} \right),$$

et par conséquent, d'après l'inégalité (6.21),

$$\|\eta(z)\| \leqslant A \exp\left(B \prod_{\alpha=(i,t)\in A} |z_i - t|^{-\rho_\alpha} \right). \tag{6.22}$$

Soit $s \in E_D^k$. Alors $f := (\Theta^* s)\eta^D$ est une fonction holomorphe sur U qui s'annule à l'ordre au moins k en tout $w \in W$. Fixons des coordonnées affines $z_1, \dots, z_d$ sur $U_1, \dots, U_d$ en choisissant le point à l'infini sur le i-ème facteur en dehors de $T_i \cup W_i$. Le développement de Taylor de la fonction f en $w \in W$ s'écrit :

$$f(z) = \sum_{\substack{I \in \mathbf{N}^d, \\ |I| \geqslant k}} a_I(w)(z-w)^I.$$

Avec ces notations, l'image de s par le morphisme d'évaluation φ_D^k est

$$\varphi_D^k(s) = \left(\sum_{\substack{I \in \mathbf{N}^d, \\ |I| = k}} a_I(w) \left(\Theta_* \frac{\partial}{\partial z}(w) \right)^{\otimes -I} \eta^{-D}(w) \right)_{w \in W}. \tag{6.23}$$

Il existe donc un nombre réel C_1 strictement positif tel que

$$\|\varphi_D^k(s)\|_{\mathfrak{p}_0} \leqslant C_1^{k+D} \max_{w \in W} \max_{|I|=k} a_I(w). \tag{6.24}$$

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, soit Ω_i un affinoïde de U_i contenant W_i. Soit $\Omega = \prod_{i=1}^d \Omega_i$. Définissons, pour tout $g \in \mathscr{A}(U)$,

$$\|g\|_\Omega = \sup_{z\in\Omega} |g(z)|.$$

Démontrons alors qu'il existe un nombre réel C_2 strictement positif tel que, pour tout entier naturel k,

$$\max_{|I|=k} |a_I(w)| \leqslant C_2^{-k} \|f\|_\Omega. \tag{6.25}$$

Comme Ω_i est ouvert pour la topologie p-adique, il existe un nombre réel strictement positif r tel que le disque de centre w_i et de rayon r soit contenu dans Ω_i, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et tout $w_i \in W_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|f\|_\Omega &= \sup_{z\in\Omega} \sup_{I\in\mathbf{N}^d} |a_I(w)||(z-w)^I| \\
&\geqslant \max_{|I|=k} \left(|a_I(w)| \sup_{z\in\Omega} |z_1 - w_1|^{i_1} \dots |z_d - w_d|^{i_d} \right) \\
&\geqslant \max_{|I|=k} \left(|a_I(w)| r^{|I|} \right) \\
&\geqslant r^k \max_{|I|=k} |a_I(w)|.
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de poser $C_2 = r$.

Pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant d$, définissons

$$P_i(z) = \frac{\prod_{w\in W_i} (z-w)^{\lfloor \frac{k}{d} \rfloor}}{\prod_{t\in T_i} (z-t)^{a_{(i,t)}}}, \tag{6.26}$$

où les $a_{(i,t)}$, pour $t \in T_i$, sont des nombres entiers naturels non nuls tels que

$$\sum_{t\in T_i} a_{(i,t)} = \left\lfloor \frac{k}{d} \right\rfloor m. \tag{6.27}$$

Ainsi, P_i est une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ dont les zéros sont les $w \in W_i$ et sont tous d'ordre $\lfloor \frac{k}{d} \rfloor$, et dont les pôles sont les $t \in T_i$, le pôle $t \in T_i$ étant d'ordre $a_{(i,t)}$.

D'après le corollaire 6.17, la fonction f peut s'écrire

$$f(z) = \sum_{i=1}^d f_i(z) P_i(z_i). \tag{6.28}$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
|f|_\Omega &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d} \|f_i\|_\Omega \|P_i\|_\Omega \\
&\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d} \|f_i\|_\Omega C_3^k, \qquad (6.29)
\end{aligned}
$$

où C_3 est un nombre réel strictement positif.

D'après le lemme 6.14, pour toute presque semi-norme multiplicative ultramétrique s sur $\mathscr{A}(U)$ telle que, pour tout $w_d \in W_d$ l'endomorphisme de $\mathscr{A}(U)$ donné par $h(z_1, \ldots, z_d) \mapsto h(z_1, \ldots, z_{d-1}, w_d)$ est de norme inférieure à 1 et telle que, pour toute fonction P régulière sur $\mathscr{A}(U)$, $s(P) \neq \infty$, on a la majoration suivante

$$
s(f_i) \leqslant s(f) s(P_i)^{-1}, \qquad (6.30)
$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Pour tout $\alpha \in A$, soit r_α un nombre réel strictement positif. Pour tout $\tau = (t_1, \ldots, t_d) \in T$, soit s_τ la presque semi-norme multiplicative sur $\mathscr{A}(U)$ associée aux rayons $(r_{(1,t_1)}, \ldots, r_{(d,t_d)})$ (voir (6.10)) donnée par :

$$
s_\tau(g) = \sup_{\substack{|z_i - t_i| = r_{(i,t_i)},\\ 1\leqslant i\leqslant d}} |g(z)|, \qquad (6.31)
$$

pour tout $g \in \mathscr{A}(U)$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, posons $\Omega'_i = \{|z_i - t| \geqslant r_{(i,t)},\ t \in T_i\}$ et $\Omega' = \prod_{i=1}^d \Omega'_i$. Si les $r_{(i,t)}$ sont suffisamment petits, alors $\Omega'_i \supset \Omega_i$ pour tout i et donc

$$
\|.\|_\Omega \leqslant \|.\|_{\Omega'}.
$$

De plus (voir (6.11)),

$$
\|.\|_{\Omega'} = \max_{\tau\in T} s_\tau.
$$

Ainsi, d'après (6.29),

$$
\begin{aligned}
\|f\|_\Omega &\leqslant C_3^k \max_{1\leqslant i\leqslant d} \|f_i\|_\Omega \\
&\leqslant C_3^k \max_{1\leqslant i\leqslant d} \|f_i\|_{\Omega'} \\
&\leqslant C_3^k \max_{1\leqslant i\leqslant d} \max_{\tau\in T} s_\tau(f_i) \\
&\leqslant C_3^k \max_{1\leqslant i\leqslant d} \max_{\tau\in T} s_\tau(f) s_\tau(P_i)^{-1}, \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

d'après l'inégalité (6.30) vérifiée par les presque semi-normes des fonctions f_i.

Soit $\tau \in T$. Majorons les termes $s_\tau(f)$ et $s_\tau(P_i)^{-1}$. La presque semi-norme s_τ étant multiplicative, on a, d'après la définition (6.26) de la fonction P_i,

$$
s_\tau(P_i)^{-1} = s_\tau(P_i^{-1}) \leqslant r_{(i,t_i)}^{a_{(i,t)}} C_4^k, \qquad (6.33)
$$

où C_4 est un nombre réel strictement positif. Grâce à l'hypothèse d'uniformisation et à l'inégalité (6.22) qui en découle,

$$\begin{aligned}
s_\tau(f) &= s_\tau\left((\Theta^* s)\eta^D\right) \\
&= \sup_{\cap_{i=1}^d \{|z_i - t_i| = r_{(i,t_i)}\}} \left|(\Theta^* s)\eta^D\right| \\
&\leqslant \|s\|_\infty \sup_{\cap_{i=1}^d \{|z_i - t_i| = r_{(i,t_i)}\}} \left|\eta^D\right| \\
&\leqslant \|s\|_\infty A^D \exp\left(BD\prod_{i=1}^d r_{(i,t_i)}^{-\rho_{(i,t_i)}}\right). \qquad (6.34)
\end{aligned}$$

D'après les inégalités (6.32), (6.33) et (6.34),

$$\begin{aligned}
|f|_\Omega &\leqslant C_3^k \max_{1\leqslant i\leqslant d}\max_{\tau\in T} r_{(i,t_i)}^{a_{(i,t_i)}} C_4^k \|s\|_\infty A^D \exp\left(BD\prod_{i=1}^d r_{(i,t_i)}^{-\rho_{(i,t_i)}}\right) \\
&\leqslant C_5^{k+D}\|s\|_\infty \max_{1\leqslant i\leqslant d}\max_{\tau\in T} r_{(i,t_i)}^{a_{(i,t_i)}} \exp\left(BD\prod_{i=1}^d r_{(i,t_i)}^{-\rho_{(i,t_i)}}\right),
\end{aligned}$$

où $C_5 = (\max\{C_3C_4, A\})^2 > 0$. Grâce à cette inégalité, on obtient, d'après les majorations (6.24) et (6.25), la majoration suivante de la hauteur à la place $\mathfrak{p}_0$ du morphisme d'évaluation φ_D^k,

$$h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_6(k+D) + \max_{1\leqslant i\leqslant d}\max_{\tau\in T}\left(a_{(i,t_i)}\log r_{(i,t_i)} + BD\prod_{i=1}^d r_{(i,t_i)}^{-\rho_{(i,t_i)}}\right), \qquad (6.35)$$

où $C_6 = \log(C_1C_2^{-1}C_5)$.

Choisissons à présent les paramètres a_α et r_α. Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, posons

$$\mu_i = \frac{m_i}{d\sum_{t\in T_i}\rho_{(i,t)}}, \qquad (6.36)$$

de sorte que

$$\sum_{t\in T_i}\mu_i\rho_{(i,t)} = \frac{m_i}{d}.$$

Montrons que l'on peut fixer les $a_\alpha \in \mathbf{N}^*$ de telle sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et pour tout $t \in T_i$,

$$a_{(i,t)}(k) = k\mu_i\rho_{(i,t)} + g_{(i,t)}(k), \qquad (6.37)$$

où $g_{(i,t)}(k) \underset{k\to\infty}{=} O(1)$. Rappelons que les paramètres $a_{(i,t)}$ doivent également vérifier la condition

$$\sum_{t\in T_i} a_{(i,t)}(k) = \left\lfloor \frac{k}{d} \right\rfloor m_i, \tag{6.27}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$. Soient $i \in \{1,\dots,d\}$ et k un nombre entier naturel. Lorsque les $a_{(i,t)}(k)$, pour t parcourant T_i, prennent toutes les valeurs entières possibles dans l'intervalle

$$\left[\left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)} - \frac{m_i}{\operatorname{Card} T_i}\right\rfloor, \left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)}\right\rfloor + 1\right],$$

la somme $\sum_{t\in T_i} a_{(i,t)}(k)$ prend toutes les valeurs entières comprises entre

$$\sum_{t\in T_i}\left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)} - \frac{m_i}{\operatorname{Card} T_i}\right\rfloor \text{ et } \sum_{t\in T_i}\left(\left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)}\right\rfloor + 1\right).$$

Vérifions que $\sum_{t\in T_i}\left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)} - \frac{m_i}{\operatorname{Card} T_i}\right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{k}{d}\right\rfloor m_i \leqslant \sum_{t\in T_i}\left(\left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)}\right\rfloor + 1\right)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T_i}\left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)} - \frac{m_i}{\operatorname{Card} T_i}\right\rfloor &\leqslant \sum_{t\in T_i} k\mu_i\rho_{(i,t)} - \sum_{t\in T_i}\frac{m_i}{\operatorname{Card} T_i}\\ &\leqslant \frac{k}{d}m_i - m_i \leqslant \left\lfloor\frac{k}{d}\right\rfloor m_i,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T_i}\left(\left\lfloor k\mu_i\rho_{(i,t)}\right\rfloor + 1\right) &\geqslant \sum_{t\in T_i}(k\mu_i\rho_{(i,t)} - 1 + 1)\\ &\geqslant \frac{k}{d}m_i \geqslant \left\lfloor\frac{k}{d}\right\rfloor m_i.\end{aligned}$$

Ainsi, on peut choisir les $a_{(i,t)}(k)$ de telle sorte que $\sum_{t\in T_i} a_{(i,t)}(k) = \left\lfloor\frac{k}{d}\right\rfloor m_i$ et la suite $(g_{(i,t)}(k))_k$ est bornée. Soit

$$\nu = \sum_{i=1}^{d}\mu_i^{-1} = d\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\sum_{t\in T_i}\rho_{(i,t)}}{m_i}\right). \tag{6.38}$$

Pour tout $\alpha \in A$, posons

$$r_\alpha = \left(\frac{BD\nu}{k}\right)^{\frac{k}{a_\alpha \nu}}. \tag{6.39}$$

Alors, avec ces choix de rayons r_α, l'inégalité (6.35) devient

$$
\begin{aligned}
h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) &\leqslant C_6(k+D) + \max_{1\leqslant i\leqslant d}\max_{\tau\in T}\left(a_{(i,t_i)}\log r_{(i,t_i)} + BD\prod_{j=1}^{d} r_{(j,t_j)}^{-\rho_{(j,t_j)}}\right)\\
&\leqslant C_6(k+D) + \max_{1\leqslant i\leqslant d}\max_{\tau\in T}\left(\frac{k}{\nu}\log\left(\frac{BD\nu}{k}\right) + BD\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{BD\nu}{k}\right)^{-k\frac{\rho_{(j,t_j)}}{\nu a_{(j,t_j)}}}\right)\\
&\leqslant C_6(k+D) + \frac{k}{\nu}\log\left(\frac{BD\nu}{k}\right) + \max_{\tau\in T} BD\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{BD\nu}{k}\right)^{-k\frac{\rho_{(j,t_j)}}{\nu a_{(j,t_j)}}}\\
&\leqslant C_6(k+D) + \frac{k}{\nu}\log\left(\frac{BD\nu}{k}\right) + BD\max_{\tau\in T}\exp\left(\frac{k}{\nu}\log\left(\frac{k}{BD\nu}\right)\sum_{j=1}^{d}\frac{\rho_{(j,t_j)}}{a_{(j,t_j)}}\right)
\end{aligned}
$$

Supposons $\frac{k}{BD\nu} \geqslant 1$, c'est-à-dire $\frac{k}{D} \geqslant \nu B$. On a alors

$$
\begin{aligned}
h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) &\leqslant C_6(k+D) + \frac{k}{\nu}\log\left(\frac{BD\nu}{k}\right) + BD\exp\left(\frac{k}{\nu}\log\left(\frac{k}{BD\nu}\right)\max_{\tau\in T}\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_{(i,t_i)}}{a_{(i,t_i)}}\right),\\
&\leqslant C_7(k+D) + \frac{k}{\nu}\log\left(\frac{D}{k}\right) + BD\exp\left(\frac{k}{\nu}\log\left(\frac{k}{BD\nu}\right)\max_{\tau\in T}\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_{(i,t_i)}}{a_{(i,t_i)}}\right),
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

où l'on a posé $C_7 = \max(C_6 + \frac{1}{\nu}\log(B\nu), C_6)$.

Lemme 6.18. — *Il existe un nombre réel positif C_8 tel que pour tout nombre entier naturel non nul k,*

$$\frac{k}{\nu}\max_{\tau\in T}\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_{(i,t_i)}}{a_{(i,t_i)}} \leqslant 1 + \frac{C_8}{k}.$$

Démonstration. — D'après le choix des $a_{(i,t)}$ (voir (6.37)), pour tout $(i,t)\in A$, on a

$$\frac{\rho_{(i,t)}}{a_{(i,t)(k)}} = \frac{\rho_{(i,t)}}{k\mu_i\rho_{(i,t)} + g_{(i,t)}(k)} = \frac{1}{k\mu_i + \frac{g_{(i,t)}(k)}{\rho_{(i,t)}}}.$$

Ainsi, pour tout $\tau \in T$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\nu}\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_{(i,t)}}{a_{(i,t)}} &= \frac{k}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{k\mu_i}+\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{k\mu_i+\frac{g_{(i,t)}(k)}{\rho_{(i,t)}}}-\frac{1}{k\mu_i}\right)\right)\\
&= \frac{k}{\nu}\left(\frac{\nu}{k}-\sum_{i=1}^{d}\frac{g_{(i,t)}(k)/\rho_{(i,t)}}{k\mu_i(k\mu_i+\frac{g_{(i,t)}(k)}{\rho_{(i,t)}})}\right)\\
&= 1-\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{d}\frac{g_{(i,t)}(k)/\rho_{(i,t)}}{\mu_i(k\mu_i+\frac{g_{(i,t)}(k)}{\rho_{(i,t)}})}.
\end{aligned}$$

Comme pour tout $\alpha \in A$, $g_\alpha(k)$ est une fonction bornée de k et que l'ensemble A est fini, il existe un nombre réel C_8 tel que

$$\frac{k}{\nu}\max_{\tau\in T}\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_{(i,t_i)}}{a_{(i,t_i)}} \leqslant 1+\frac{C_8}{k}.$$

□

Ainsi, pour tous nombres entiers naturels k, D tels que $\frac{k}{D} \geqslant \nu B$,

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\nu}\max_{\tau\in T}\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_{(i,t_i)}}{a_{(i,t_i)}}\log\left(\frac{k}{BD\nu}\right) &\leqslant (1+\frac{C_8}{k})\log\left(\frac{k}{BD\nu}\right)\\
&\leqslant \log\frac{k}{BD\nu}+\frac{C_8}{k}\log\frac{k}{BD\nu}\\
&\leqslant \log\frac{k}{BD\nu}+\frac{C_8}{BD\nu}\frac{BD\nu}{k}\log\frac{k}{BD\nu}.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{k}{BD\nu} \geqslant 1$ et la fonction $u \mapsto \frac{\log u}{u}$ est bornée sur $[1,+\infty[$, il existe un nombre réel C_9 tel que

$$\frac{k}{\nu}\max_{\tau\in T}\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_{(i,t_i)}}{a_{(i,t_i)}}\log\left(\frac{k}{BD\nu}\right) \leqslant \log\frac{k}{BD\nu}+C_9.$$

D'après la majoration (6.40) de la norme du morphisme d'évaluation, on a alors

$$\begin{aligned}
h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) &\leqslant C_7(k+D)+\frac{k}{\nu}\log\left(\frac{D}{k}\right)+BD\exp\left(\log\frac{k}{BD\nu}+C_9\right)\\
&\leqslant C_7(k+D)+\frac{k}{\nu}\log\left(\frac{D}{k}\right)+BD\frac{k}{BD\nu}e^{C_9}\\
&\leqslant C_{10}(k+D)-\frac{k}{\nu}\log(\frac{k}{D}) \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $C_{10} = \max(C_7, C_7 + \frac{e^{C_9}}{\nu})$.

Montrons que la majoration (6.41) est encore valable pour $\frac{k}{D} < \nu B$.

D'après la définition d'α-arithmétique, il existe un nombre réel positif C_0 tel que la hauteur de φ_D^k vérifie la majoration suivante à la place $\mathfrak{p}_0$, comme en toute place :

$$h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_0(k+D).$$

Alors

$$\begin{aligned} h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) + \frac{k}{\nu}\log(\frac{k}{D}) &\leqslant C_0(k+D) + \frac{k}{\nu}\log(\frac{k}{D}) \\ &\leqslant C_0(k+D) + \frac{k}{\nu}\log(\nu B), \end{aligned}$$

car $\frac{k}{D} \leqslant \nu B$. Posons $C_{11} = C_0 + \frac{1}{\nu}\log(\nu B)$. Alors

$$h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) + \frac{k}{\nu}\log(\frac{k}{D}) \leqslant C_{11}(k+D),$$

c'est-à-dire

$$h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_{11}(k+D) - \frac{k}{\nu}\log(\frac{k}{D}). \tag{6.42}$$

D'après les inégalités (6.41) et (6.42), en posant $C_{12} = \max(C_{10}, C_{11})$, on a bien, pour tous k et D,

$$h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_{12}(k+D) - \frac{k}{\nu}\log(\frac{k}{D}).$$

Finalement, d'après la définition de ν (6.38), on a bien, pour tous nombres entiers $k \geqslant 0$ et $D \geqslant 1$,

$$h_{\mathfrak{p}_0}(\varphi_D^k) \leqslant C_{12}(k+D) - \frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\rho_i}{m_i}\right)^{-1} k\log\frac{k}{D}. \tag{6.43}$$

Le lemme 6.8 est donc démontré, ce qui conclut également la démonstration du théorème 6.5.

BIBLIOGRAPHIE

ADAMS, W. W. (1966). Transcendental numbers in the P-adic domain. *Amer. J. Math.*, 88:279–308.

AHLFORS, L. V. et SARIO, L. (1960). *Riemann surfaces.* Princeton Mathematical Series, No. 26. Princeton University Press, Princeton, N.J.

BERTRAND, D. (1974). Transcendance dans le domaine p-adique. *In Groupe de Travail d'Analyse Ultramétrique (1re année : 1973/74) ; Exp. No. 10*, page 7. Secrétariat Mathématique, Paris.

BERTRAND, D. (1975). Un théorème de Schneider-Lang sur certains domaines non simplement connexes. *In Séminaire Delange-Pisot-Poitou (16e année : 1974/75), Théorie des nombres, Fasc. 2, Exp. No. G18*, page 13. Secrétariat Mathématique, Paris.

BERTRAND, D. (1977a). Sous-groupes à un paramètre p-adique de variétés de groupe. *Invent. Math.*, 40(2):171–193.

BERTRAND, D. (1977b). A transcendence criterion for meromorphic functions. *In Transcendence theory : advances and applications (Proc. Conf., Univ. Cambridge, Cambridge, 1976)*, pages 187–193. Academic Press, London.

BOMBIERI, E. (1970). Algebraic values of meromorphic maps. *Invent. Math.*, 10:267–287.

BOSCH, S., GÜNTZER, U. et REMMERT, R. (1984). *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, volume 261 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin.

BOST, J.-B. (1996). Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Astérisque*, (237):Exp. No. 795, 4, 115–161. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.

BOST, J.-B. (2001). Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93):161–221.

BOST, J.-B. (2006). Evaluation maps, slopes, and algebraicity criteria. *In*

International Congress of Mathematicians. Vol. II, pages 537–562. Eur. Math. Soc., Zürich.

Bost, J.-B. et Chambert-Loir, A. (2009). Analytic curves in algebraic varieties over number fields. *In Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 de *Progr. Math.*, pages 69–124. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.

Camacho, C. et Lins Neto, A. (1985). *Geometric theory of foliations.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. Traduit du portugais par Sue E. Goodman.

Chambert-Loir, A. (2002). Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne (d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky). *Astérisque*, (282):Exp. No. 886, viii, 175–209. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

Chambert-Loir, A. (2010). Théorèmes d'équidistribution pour les systèmes dynamiques d'origine arithmétique. *In Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux*, volume 30, pages 97–189. SMF.

Chen, H. (2006). *Positivité en géométrie algébrique et en géométrie d'Arakelov : application à l'algébrisation et à l'étude asymptotique des polygones de Harder-Narasimhan.* Thèse de doctorat, École polytechnique.

Chen, H. (2009). Explicit uniform estimation of rational points. I. Estimation of heights. À paraître dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

Choodnovsky, G. V. (1978). Values of meromorphic functions of order 2. *In Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année : 1977/78, Théorie des nombres, Fasc. 2*, pages Exp. No. 45, 18. Secrétariat Math., Paris.

Choodnovsky, G. V. (1979). A new method for the investigation of arithmetical properties of analytic functions. *Ann. of Math. (2)*, 109(2):353–376.

Fresnel, J. et van der Put, M. (1981). *Géométrie analytique rigide et applications*, volume 18 de *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston, Mass.

Gasbarri, C. (2010). Analytic subvarieties with many rational points. *Math. Ann.*, 346(1):199–243.

Gaudron, É. (2008). Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 119:21–95.

Grauert, H. et Remmert, R. (2004). *Theory of Stein spaces.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Traduit l'allemand par Alan Huckleberry, Réimpression de la traduction de 1979.

Kiehl, R. (1967). Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Invent. Math.*, 2:191–214.

Lang, S. (1962). Transcendental points on group varieties. *Topology*, 1:313–318.

LANG, S. (1965). Algebraic values of meromorphic functions. *Topology*, 3:183–191.

LANG, S. (1966). *Introduction to transcendental numbers.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.

LANG, S. (1997). *Survey on Diophantine Geometry.* Springer.

LEE, J. M. (2003). *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York.

LIU, Q. (2002). *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

MAHLER, K. (1935). Über transzendente P-adische Zahlen. *Compositio Math.*, 2:259–275.

REYSSAT, É. (1977). Travaux récents de G. V. Čudnovskij. *In Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 18e année : 1976/77, Théorie des nombres, Fasc. 2*, pages Exp. No. 29, 7. Secrétariat Math., Paris.

ROBBA, P. (1978). Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p-adiques en plusieurs variables. *Invent. Math.*, 48(3):245–277.

ROY, D. (2002). Interpolation sur des perturbations d'ensembles produits. *Bull. Soc. Math. France*, 130(3):387–408.

SCHNEIDER, T. (1949). Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. *Math. Ann.*, 121:131–140.

SCHNEIDER, T. (1957). *Einführung in die transzendenten Zahlen.* Springer-Verlag, Berlin.

SKODA, H. (1977). Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et applications arithmétiques. *In Journées sur les Fonctions Analytiques (Toulouse, 1976)*, pages 314–323. Lecture Notes in Math., Vol. 578. Springer, Berlin.

VIADA, E. (2001). *Elliptic Isogenies and Slopes.* Thèse de doctorat, ETH Zürich.

VIADA, E. (2005). Slopes and abelian subvariety theorem. *J. Number Theory*, 112(1):67–115.

WAKABAYASHI, I. (1985). On the optimality of certain estimates for algebraic values of analytic functions. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 39(3):400–414.

WAKABAYASHI, I. (1987). Algebraic values of meromorphic functions on Riemann surfaces. *J. Number Theory*, 25(2):220–229.

WALDSCHMIDT, M. (1974). *Nombres transcendants.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 402. Springer-Verlag, Berlin.

WALDSCHMIDT, M. (1977). On functions of several variables having algebraic Taylor coefficients. *In Transcendence theory : advances and applications (Proc. Conf., Univ. Cambridge, Cambridge, 1976)*, pages 169–186. Academic Press, London.

WALDSCHMIDT, M. (1979). *Nombres transcendants et groupes algébriques*, volume 69-70 de *Astérisque.* Société Mathématique de France, Paris, seconde édition. Avec des appendices de Daniel Bertrand et Jean-Pierre Serre. Édition de 1987.

WALDSCHMIDT, M. (2000). *Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables*, volume 326 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin.

Sur le théorème de Schneider-Lang

Le théorème de Schneider-Lang est un critère classique de transcendance pour des nombres complexes. Il dit que des fonctions méromorphes d'ordre fini, vérifiant une équation différentielle polynomiale à coefficients dans un corps de nombres et algébriquement indépendantes ne peuvent prendre simultanément des valeurs dans ce corps de nombres qu'en un nombre fini de points.

Dans cette thèse, nous démontrons des généralisations géométriques de ce critère, valables sur le corps des nombres complexes ou sur un corps p-adique. Ces résultats s'appuient sur des lemmes de Schwarz adaptés, que nous avons établis. En dimension 1, nous démontrons un théorème concernant des sous-schémas formels admettant une uniformisation par une courbe algébrique affine. En dimension supérieure, notre théorème s'applique à des sous-schémas formels admettant une uniformisation par un produit d'ouverts de la droite affine, sous l'hypothèse supplémentaire que l'ensemble des points étudiés est un produit cartésien. Les démonstrations de ces résultats reposent sur la méthode des pentes développée par J.-B. Bost et utilisent le langage de la géométrie d'Arakelov.

About the Schneider-Lang theorem

The Schneider-Lang theorem is a classic transcendence criterion for complex numbers. It asserts that there are only finitely many points at which algebraically independent meromorphic functions of finite order of growth can simultaneously take values in a number field, when satisfying a polynomial differential equation with coefficients in this given number field.

In this Thesis, we prove geometrical generalizations of this criterion, holding for both the field of complex numbers and a p-adic field. These results are based on suitable Schwarz lemmas we have been able to establish. In dimension one we have proven a theorem for formal subschemes admitting a uniformization by an algebraic affine curve. In the higher dimensional case, our theorem applies to formal subschemes with a uniformization by a product of open subsets of the affine line, under the additional hypothesis that the set of rational points is a Cartesian product. The proofs of these results rely on the slopes method developed by J.-B. Bost and make use of the language of Arakelov geometry.